

**ANNALEN**  
**DER**  
**PHYSIK UND CHEMIE.**

**NEUE FOLGE.**

**BAND XV.**

PH

PHYSIK UND CHEMIE

20972

# ANNALEN DER PHYSIK UND CHEMIE.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH  
F. A. C. GREY, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF.

NEUE FOLGE.

BAND XV.

DER GANZEN FOLGE ZWEIHUNDERT EIN UND FÜNFZIGSTER.

UNTER MITWIRKUNG  
DER PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT IN BERLIN

UND INSBESONDERE DES HERRN  
H. HELMHOLTZ

HERAUSGEGEBEN VON  
G. WIEDEMANN.

NEBST ACHT FIGURENTAFELN.



LEIPZIG, 1882.  
VERLAG VON JOHANN AMBROSIIUS BARTH.





# Inhalt.

Neue Folge. Band XV.

## Erstes Heft.

	Seite
I. H. Haga. Bestimmung der Temperaturänderungen beim Ausdehnen und Zusammenziehen von Metalldrähten und des mechanischen Wärmeäquivalents . . . . .	1
II. W. Hergesell. Erörterungen zur Fourier-Poisson'schen Wärmeleitungstheorie . . . . .	19
III. F. Koláček. Ueber die Beziehung des Gefrierpunktes von Salzlösungen zu deren Spannkraftsgesetze . . . . .	38
IV. B. Hasselberg. Bemerkung zu Hrn. Wüllner's Aufsatz: „Ueber die Spectra des Wasserstoffs und des Acetylens“ . . .	45
V. H. Struve. Fresnel's Interferenzerscheinungen; theoretisch und experimentell bearbeitet . . . . .	49
VI. E. Less. Ueber Anwendung des Telephons zur Bestimmung des Widerstandes galvanischer Ketten und Säulen . . . .	80
VII. R. Colley. Ueber die Existenz einer dielectricischen Polarisation in Electrolyten . . . . .	94
VIII. C. Bohn. Ueber den Differentialflaschenzug . . . . .	112
IX. A. Kerber. Refractionstheorie auf geometrischer Grundlage	140
X. E. Edlund. Ueber den electrischen Widerstand der Gase	165
XI. A. v. Waltenhofen. Bemerkung über Hrn. F. Auerbach's zweite Abhandlung: „Ueber die magnetische Nachwirkung“ . . . . .	171

	Seite
XII. G. Wiedemann. Ueber einen Apparat zur Darstellung der Erscheinungen des Geysirs . . . . .	173
XIII. K. F. Slotte. Ueber die Wheatstone'sche Brücke . . . . .	176

*Geschlossen am 10. Januar 1882.*

### Zweites Heft.

I. E. Schenck. Ueber die elliptische Polarisation des Lichts bei Reflexion an Krystalloberflächen . . . . .	177
II. L. M. Cheesman. Ueber den Einfluss der mechanischen Härte auf die magnetischen Eigenschaften des Stahles und des Eisens . . . . .	204
III. H. W. Eaton. Ueber das Maximum der Magnetisirung der diamagnetischen und schwach paramagnetischen Körper . . . . .	225
IV. E. Goldstein. Ueber die Reflexion electrischer Strahlen . . . . .	246
V. — Ueber den Einfluss der Kathodenform auf die Vertheilung des Phosphoreszenzlichtes Geissler'scher Röhren . . . . .	254
VI. — Ueber den Zusammenhang zwischen Gasdichte und Schichtenintervall in Geissler'schen Röhren . . . . .	277
VII. — Ueber das Bandenspectrum der Luft . . . . .	280
VIII. A. Schuller. Ueber die Bildung des Wasserstoffhyperoxyds während der Verbrennung . . . . .	289
IX. — Erwiderung in Angelegenheit der Bildungswärme des Wassers . . . . .	292
X. K. Ångström. Die Ausdehnung des Wassers durch Absorption von Gasen . . . . .	297
XI. A. Kerber. Refractionstheorie auf geometrischer Grundlage . . . . .	308
XII. F. Kessler. Ueber das Minimum der Rotation des Lichtstrahles bei combinirter Brechung und Spiegelung an einer Kugel . . . . .	330
XIII. — Das Minimum der Ablenkung eines Lichtstrahls durch ein Prisma . . . . .	333
XIV. — Ueber das Minimum der Zeit bei der Brechung des Lichts . . . . .	334

## Inhalt.

VII

	Seite
XV. P. Riess. Ueber electriche Schatten . . . . .	335
XVI. E. Mach. Erklärung . . . . .	336

*Geschlossen am 1. Februar 1882.*

### Drittes Heft.

I. E. Ketteler u. C. Pulfrich. Photometrische Untersuchungen	337
II. E. Lommel. Theorie der elliptischen Doppelbrechung . .	378
III. E. Kittler. Ueber Spannungsdifferenzen zwischen einem Metall und Flüssigkeiten verschiedener Concentration . .	391
IV. F. Exner. Ueber galvanische Elemente, die nur aus Grundstoffen bestehen und über das electriche Leitungsvermögen von Brom und Jod . . . . .	412
V. F. Schulze-Berge. Erwiderung auf eine Bemerkung des Hrn. F. Exner, den Volta'schen Fundamentalversuch betreffend . . . . .	440
VI. M. Planck. Verdampfen, Schmelzen und Sublimiren . .	446
VII. K. Antolik. Ueber neue electriche Figuren und über das Gleiten electriccher Funken . . . . .	475
VIII. R. Weber. Darstellung longitudinaler und transversaler Wellen durch Projection . . . . .	491
IX. S. Oppenheim. Zur Theorie der stationären Bewegung .	495

*Geschlossen am 15. Februar 1882.*

### Viertes Heft.

I. W. Voigt. Ueber das Verhältniss der Quercontraction zur Längsdilatation bei Stäben von isotropem Glas . . . .	497
II. E. Edlund. Ueber den electricchen Widerstand des Vacuums . . . . .	514
III. F. Kohlrausch. Transportable Instrumente zur Messung der erdmagnetischen Intensitätsvariationen . . . . .	533
IV. — Tangentenbussole für absolute Messungen, Spiegelgalvanometer, Electrodynamometer und metallfreies Magnetometer	550

	Seite
V. E. Budde. Bemerkungen über die mechanischen Grundlagen der Gesetze von Ohm und Joule . . . . .	558
VI. J. Fröhlich. Experimentaluntersuchungen über die Intensität des gebeugten Lichtes. II. . . . .	576
VII. E. Ketteler. Einige Bemerkungen zu den Arbeiten der Herren Lommel, Glazebrook und Mathieu . . . . .	613
VIII. H. Kayser. Ueber die Verdichtung der Gase an Oberflächen . . . . .	624
IX. H. Schröder. Untersuchungen über die Abhängigkeit der Molecularrefraction flüssiger Verbindungen von ihrer chemischen Zusammensetzung . . . . .	636
X. B. Weinstein. Ueber die Bewegungsgleichungen von Lagrange . . . . .	675

*Geschlossen am 15. März 1882.*

### Nachweis zu den Figurentafeln.

- Taf. I. Haga, Fig. 1—3. — Bohn, Fig. 4. — G. Wiedemann, Fig. 5.
- Taf. II. Schenck, Fig. 1—2. — Cheesman, Fig. 3—5.
- Taf. III. Goldstein.
- Taf. IV. und V. Ketteler und Pulfrich.
- Taf. VI. Kittler, Fig. 1. — Planck, Fig. 2. — R. Weber, Fig. 3a—h.
- Taf. VII. Antolik.
- Taf. VIII. Kohlrausch.

1882.

I.  
beim  
dräht

A  
theorie  
Tempe  
rungen  
B  
A d  
P d  
α d  
c d  
w d  
so bet

J  
zu bev  
Kauts  
ausge  
moele  
ist, u  
Galva  
mittel  
es sic

1)  
p. 91.  
2)  
de la  
Ann.

## DER PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND XV.

**I. Bestimmung der Temperaturänderungen  
beim Ausdehnen und Zusammenziehen von Metall-  
drähten und des mechanischen Wärmeäquivalents;  
von H. Haga.**

Aus dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärme-  
theorie leitete im Jahre 1851 Thomson die Grösse der  
Temperaturänderungen ab, welche bei plötzlichen Aende-  
rungen der Spannung eines Stabes oder Drahtes auftreten.

Bedeutet:

$A$  das mechanische Wärmeäquivalent,

$P$  die Aenderung der Spannung,

$\alpha$  den Ausdehnungscoefficienten,

$c$  die spezifische Wärme,

$w$  das Gewicht der Längeneinheit des Körpers,

so beträgt die Temperaturänderung bei der Temperatur  $\tau$ :

$$\vartheta = - \frac{(273 + \tau) \alpha P}{A \cdot w \cdot c}.$$

Joule war der erste, der diese Formel experimentell  
zu beweisen suchte.<sup>1)</sup> Verschiedene Körper, Metalle, Holz,  
Kautschuk wurden in Form von Stäben mittelst eines Hebels  
ausgedehnt oder zusammengedrückt und durch kleine Ther-  
moelemente ihre Temperaturänderungen bestimmt. Indess  
ist die Methode<sup>2)</sup>, wodurch Joule das Verhältniss des  
Galvanometerausfalls in den Temperaturänderungen er-  
mittelte, nicht völlig einwurfsfrei, und schon dadurch erklärt  
es sich, obschon im allgemeinen die Thomson'sche Formel

1) Joule, Proc. Roy. Soc. 8. p. 355. 1857. — Phil. Trans. 149.  
p. 91. 1859.

2) Joule, Phil. Trans. 149. p. 98. 1859. — Verdet, Théorie mécan.  
de la chaleur. p. 220.

bestätigt wurde, dass dennoch eine Differenz zwischen Theorie und Versuch bestehen blieb.

Bei den Versuchen, wo die Stäbe gespannt wurden, waren die gemessenen Temperaturänderungen sämmtlich grösser als die aus obiger Formel berechneten mit  $A = 425$ . Hätte man also aus diesen Versuchen  $A$  berechnet, so wäre das mechanische Wärmeäquivalent kleiner als 425 gefunden. Bei den Versuchen, wo die Stäbe comprimirt wurden, waren die gemessenen Temperaturänderungen bald grösser, bald kleiner als die berechneten, aber es blieben ziemlich beträchtliche Differenzen.

Nachher hat Edlund<sup>1)</sup> über denselben Gegenstand Versuche angestellt; statt Stäben wurden Metalldrähte gewählt, welche zwischen einer thermoelectrischen Zange gepresst wurden. Aus seinen Versuchen mit verschiedenen Metalldrähten folgerte er, dass sich zwar die relativen Werthe der bei der Volumenänderung entstehenden Temperaturänderungen mittelst der Thomson'schen Formel berechnen liessen, dass dies jedoch nicht von den absoluten Werthen gälte, da aus der beobachteten Temperaturänderung bei Stahldraht der Werth von  $A = 682,7$  Kilogrammmeter gefunden wurde.

Dieses Resultat sucht Edlund aus dem Vorhandensein innerer Arbeit zu erklären.

Rühlmann<sup>2)</sup> bestreitet diese Meinung; und in der That, eine innere Arbeit kann die richtige Erklärung nicht sein, da die Thomson'sche Formel aus einem Kreisprocesse abgeleitet und also unabhängig von derselben ist. Edlund hatte für die Ausdehnungscoefficienten die von Lavoisier und Laplace bestimmten Werthe angenommen, während in der Thomson'schen Formel  $\alpha$  den Ausdehnungscoefficienten der gespannten Drähte bedeutet. Da aber nach Dahlander<sup>3)</sup> der Ausdehnungscoefficient eines gespannten Drahtes grösser ist als der eines nicht gespannten, müsste  $A$  noch grösser ausgefallen sein.

1) Edlund, Pogg. Ann. 126. p. 539. 1865.

2) Rühlmann, Handbuch der mech. Wärmetheorie, p. 529.

3) Dahlander, Pogg. Ann. 145. p. 147. 1872.

Sehr unwahrscheinlich ist es weiter nach Rühlmann, dass die spezifische Wärme gespannter Drähte von der spezifischen Wärme nicht gespannter wesentlich verschieden sei. Er betrachtet daher die Frage als eine noch offene, die nur durch Versuche zu entscheiden sei.

Diese Entscheidung ist der Zweck vorliegender Untersuchung.

Wie Edlund habe ich Metalldrähte gewählt, um aber allen Einwendungen möglichst vorzubeugen, habe ich nach der Messung der Temperaturänderungen den Ausdehnungscoëfficienten der gespannten Drähte und die spezifische Wärme bestimmt.

#### I. Temperaturänderungen beim Ausdehnen und Zusammenziehen.

**a. Die Methode.** Die Vorrichtung zur Aenderung der Spannung der Drähte ist in Taf. I Fig. 1 abgebildet.

Der hölzerne Klotz *A* und das Messingstück *B* wurden in den Tisch festgeschraubt; in letzterem dienten zwei Stahlschrauben mit conischen Enden als Axe, um welche der Hebel *CD* drehbar war; sein kürzerer (10,5 cm) vertical gestellter Arm bildete eine Klemme, in welcher ein Ebonitcylinder befestigt wurde; durch seine Axe und durch einen Einschnitt im hölzernen Klotze ging der Draht *E*, welcher durch zwei auf ihn gelöthete Metallstücke genügend befestigt werden konnte. Die horizontale Lage des Drahtes wurde gewählt, um bequem eine gleichmässige Temperatur erhalten zu können, was durch ein Dach von Watte, das allerseits auf dem Tische ruhte, völlig erreicht wurde. Auf dem längeren (60 cm) Hebelarme *D* verschoben sich die Gewichte zwischen einer auf dem Hebelarme befestigten Klemmschraube und dem Ende, sodass der Draht stets gespannt blieb.

Zur Messung der Temperaturänderungen beim Ausdehnen und Zusammenziehen wurde ein ganz dünner Draht eines anderen Metalles um den Hauptdraht gewickelt, der ebenso wie eins der Enden des Hauptdrahtes mit einem Thomson'schen Galvanometer mit kleinem Widerstand verbunden war (Taf. I Fig. 2).

Aus der Ablenkung  $p$  des Galvanometers kann die Temperaturänderung  $\vartheta$  bestimmt werden, falls zwei Grössen bekannt sind:

1. der Widerstand der ganzen Kette  $r$ ,
2. die Ablenkung  $E$ , die beim Widerstand = 1 Siemens eine Temperaturänderung von  $1^\circ$  C. in der Berührungsstelle verursacht.

Es ist dann:

$$\vartheta = \frac{p \times r}{E}.$$

Mittelst Magneten wurde die Schwingungszeit  $T$  des Magnetes des Galvanometers auf etwa 6 Secunden reducirt, sodass zur Bestimmung von  $r$  die Zurückwerfungsmethode<sup>1)</sup> benutzt werden konnte. Ein kleiner Magnetinductor nebst einem Stöpselrheostaten wurde in den Schliessungsbogen eingeschaltet. Ist der grosse und kleine Bogen  $a$  und  $b$ ,  $\lambda$  das logarithmische Decrement ( $e^\lambda = a/b$ ), so ist bei obiger Methode die Intensität des Inductionsstromes proportional:

$$\frac{a^2 + b^2}{\sqrt{ab}} e^{-\frac{\lambda}{\pi} \arctan \frac{\lambda}{\pi}}.$$

Bestimmt man also  $a$  und  $b$  beim Widerstande  $r$  und später, durch Einschalten von 1 S.-E., beim Widerstande  $r + 1$ , so kann man aus obigem Ausdruck  $r$  berechnen.

Zur genauen Bestimmung von  $a$  und  $b$  jedoch war es nothwendig, die objective Ablesungsmethode, welche beim Thomson'schen Galvanometer gebräuchlich ist, durch die subjective zu ersetzen; mit Beibehaltung des Hohlspiegels konnte dieses erreicht werden, indem man ein kleines Fernrohr (Länge 11 cm, Objectiv  $f = 12,3$  cm, Ocular  $f = 25,8$  cm, zwischen beiden ein Coconfaden) etwas weiter vom Galvanometer aufstellte, als eine in Millimeter getheilte Glasscala, deren Bild scharf beobachtet werden konnte, sodass die Ablesung bis auf  $\frac{1}{10}$  mm völlig sicher war. Zur Bestimmung von  $E$  wurde der dünne Draht mit dem Hauptdrahte zusammengelöthet, (Taf. I Fig. 3) und diese sowie die übrigen Löthstellen zwischen Hauptdraht und dünnem Draht und den Galvanometerdrähten,

1) W. Weber, Maassbestimmungen, p. 354. — Wiedemann, Galv. 2. (1) p. 250.



wurden durch Einsenken in ein grosses Gefäss mit Wasser von der Zimmertemperatur auf dieser Temperatur  $\tau$  gehalten; der Widerstand  $R$  wurde bestimmt; dann wurde die Contactstelle: Hauptdraht — dünner Draht, mit schmelzendem Eis umgeben. Um hierbei die Ausschläge innerhalb der Scala zu halten, war es nothwendig, eine bestimmte Zahl  $S$  Siemenseinheiten einzuschalten. Bedeutet  $u$  die beobachtete Ablenkung, so ist:

$$E = \frac{u(S + R)}{\tau}.$$

Grössere Schwierigkeiten waren mit der genauen Bestimmung der Ablenkung  $p$  verbunden; aus dem ersten Ausschlage kann man zwar mit dem logarithmischen Decrement die Ruhelage ableiten, falls der Strom ein constanter ist, aber unsere Thermoströme sind aus zwei Ursachen nicht constant. Erstens geschieht die Verschiebung der Gewichte nicht plötzlich, und gerade so lange, wie diese Verschiebung dauert, ändert sich die Ruhelage; zweitens vermindert sich durch Wärmeleitung und Strahlung die Temperaturänderung sofort beim Entstehen. Hierdurch und wegen der ziemlich kurzen Schwingungszeit schwingt die Nadel ein paar mal und kehrt dann allmählich zur ursprünglichen Lage zurück. Die drei ersten Umkehrpunkte können noch genau beobachtet werden und gleichfalls die Ruhelagen in bestimmten Momenten während des langsamen Zurückkehrens.

Aus diesen Grössen kann  $p$  nach folgender Methode, die ich Dr. H. Kamerlingh Onnes verdanke, bestimmt werden.

Da das Verschieben der Gewichte innerhalb 2 Secunden geschah, und die Schwingungszeit 6 Secunden betrug, wird die Bewegung der Nadel nach dem ersten Ausschlage durch die von Edlund mitgetheilte Differentialgleichung dargestellt werden:

$$(1) \quad \frac{d^3 x}{dt^3} = -mx + q \frac{v}{wc} - 2n \frac{dx}{dt},$$

worin  $m$  die Richtkraft,  $2n$  die Kraft der Dämpfung bei einer Geschwindigkeit = 1,  $q$  die Kraft, welche ein Thermostrom, wenn  $v/wc = 1$ , auf den Magnet ausübt, bedeuten, alles dividirt durch das Trägheitsmoment. Hierbei ist  $v$  die

erregte Wärmemenge in dem Drahte, dessen Gewicht  $w$  und dessen spezifische Wärme  $c$  ist, sodass  $v/wc$  die Temperaturänderung vorstellt. Die durch Ausstrahlung, Wärmeleitung und Berührung mit der Luft entstandene Aenderung von  $v$  kann der Temperaturänderung proportional gesetzt werden, also:

$$dv = -a \frac{v}{wc} dt,$$

wodurch:

$$v = v_0 e^{-\frac{at}{wc}}.$$

Substituirt man diesen Werth in die Differentialgleichung, und setzt man:

$$\frac{qv_0}{wc} = C, \quad \sqrt{m-n^2} = l \quad \text{und} \quad \frac{a}{wc} = h,$$

so bekommt man nach der Integration:

$$(2) \quad x = \frac{C}{h^2 - 2hn + m} \left( e^{-ht} + \frac{h-n}{l} \sin lte^{-nt} - \cos lte^{-nt} \right),$$

woraus man findet für die Umkehrpunkte:

$$(3) \quad x = \frac{C}{m-hn} (e^{-hT} - \cos lTe^{-nT}),$$

die Umkehrzeiten:

$$(4) \quad \sin lTe^{-nT} = \frac{hl}{m-hn} (e^{-hT} - \cos lTe^{-nT}),$$

Die Grösse  $h$  war bei meinen Versuchen sehr klein: 0,01,  $h^2$  kann also vernachlässigt werden. Gesetzt, dass für  $h=0$  aus der Gleichung  $\sin lT_0 e^{-nT_0} = 0$  die Umkehrzeiten  $T_0$ ,  $2T_0$  u. s. w. gefunden wären, so wäre bei der ersten Umkehrung  $\cos lT_0 = -1$ , bei der zweiten  $\cos lT_0 = +1$  u. s. f. Kommt aber (da  $h$  nicht  $= 0$  ist) zu  $T_0$  hinzu  $dT_1$ , zu  $2T_0$  resp.  $dT_2$  u. s. w., und genügen  $T_1$ ,  $T_2$  u. s. w. der Gleichung (4), so ist:

$$\frac{d \sin lT_1 e^{-nT_1}}{dT_1} dT_1 = \frac{hl}{m-hn} (1 - \cos lT_1 e^{-nT_1}),$$

dasselbe für  $T_2$  u. s. w. oder:

$$dT_1 = -\frac{h}{m-hn} (1 + e^{-nT_1}) e^{nT_1}$$

$$dT_2 = \frac{h}{m-hn} (1 - e^{-nT_2}) e^{nT_2}$$

$$dT_3 = -\frac{h}{m-hn} (1 + e^{-nT_3}) e^{nT_3}.$$

Mit diesem Werthe von  $T_1$  verändert sich:

$$x = \frac{C}{m - hn} (e^{-hT_0} - \cos l T_0 e^{-nT_0}) \text{ in } x + \frac{dx}{dT_1} dT_1;$$

Dasselbe gilt für  $T_2$  und  $T_3$ , wodurch man durch Reduction für die Umkehrpunkte erhält:

$$(5) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{C}{m} \left[ \left( 1 + e^{-nT_1} \right) \left( 1 + \frac{2nh}{m} \right) - \left( 1 - e^{-hT_1} \right) \right] \\ x_2 = \frac{C}{m} \left[ \left( 1 - e^{-nT_2} \right) \left( 1 + \frac{2nh}{m} \right) - \left( 1 - e^{-hT_2} \right) \right] \\ x_3 = \frac{C}{m} \left[ \left( 1 - e^{-nT_3} \right) \left( 1 + \frac{2nh}{m} \right) - \left( 1 - e^{-hT_3} \right) \right]. \end{cases}$$

Bedeutend  $X_1$ ,  $X_2$  und  $X_3$  die Umkehrpunkte für  $h = 0$ , so ergibt sich:

$$(6) \quad \begin{cases} X_2 - X_1 = \left\{ (x_2 - x_1) + (e^{-hT_1} - e^{-hT_2}) \frac{C}{m} \right\} \left( 1 - \frac{2nh}{m} \right), \\ X_3 - X_1 = \left\{ (x_3 - x_1) + (e^{-hT_1} - e^{-hT_3}) \frac{C}{m} \right\} \left( 1 - \frac{2nh}{m} \right). \end{cases}$$

Hieraus kann also berechnet werden, wie viel zu  $x_2 - x_1$  und  $x_3 - x_1$  hinzugefügt werden muss, um  $X_2 - X_1$  und  $X_3 - X_1$  zu erhalten; aus diesen Grössen kann berechnet werden, wie weit die Gleichgewichtslage  $X$  von  $x_1$  im Augenblicke des ersten Umkehrens entfernt ist.

Diese Gleichgewichtslage muss noch verbessert werden, erstens wegen der Abkühlung (+ oder -) während der Zeit  $T_1$  und zweitens wegen der Zeit  $t'$  der Dauer der Ausdehnung und Zusammenziehung.

Ist  $x_e$  die Gleichgewichtslage zu irgend einer Zeit, findet die Ausdehnung und Zusammenziehung mit gleichförmiger Geschwindigkeit und die Abkühlung (+ oder -) nach dem Gesetz einer geometrischen Reihe statt, so ist:

$$\frac{dx_e}{dt} = \frac{p}{t'} - h x_e.$$

Die Integration liefert:

$$x_e = \frac{p}{ht'} + \text{Const. } e^{-ht}.$$

Da  $x_e = 0$  bei  $t = 0$ :  $0 = p/ht' + \text{Const.}$ , so erhält man für den Werth von:

$$x_e \text{ nach } t': \frac{p}{t'h} (1 - e^{-ht'}),$$

$$x_e \text{ nach } t: \frac{p}{t'h} (1 - e^{-ht}) \text{ oder } = \frac{p}{t'h} (1 - e^{-ht'}) e^{-h(t-t')}.$$

Also bei der ersten Umkehr des Magnets:

$$X = \frac{p}{t'h} (1 - e^{-ht'}) e^{-h(T_1-t')} \text{ oder } X = p \left(1 + \frac{ht'}{2}\right) e^{-hT_1},$$

woraus:

$$p = X \left(1 - \frac{ht'}{2}\right) e^{-hT_1}.$$

$T_1$  ist nicht die gewöhnliche Schwingungszeit; annähernd ist aber:

$$T_1 = T + \frac{t'}{2}.$$

Hieraus ergibt sich:

$$(7) \quad p = X e^{hT}.$$

In den Formeln (6) sind ebenfalls statt  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ ,  $T$ ,  $2T$  und  $3T$  benutzt. Die Schwingungsdauer  $T$  war leicht zu bestimmen; aus  $T$  und  $\lambda$  konnte  $n$  berechnet werden, da  $\lambda = nT$ , und ebenfalls  $m$  aus  $T = \pi/\sqrt{m-n^2}$ . Zur Bestimmung von  $h$  wurden während des langsamen Zurückkehrens zur ursprünglichen Lage in bestimmten Momenten  $t_1$  und  $t_2$  die Ruhelagen  $x'$  und  $x''$  bestimmt. Es ist nämlich:

$$x' = C e^{-h(t_1-t)}, \quad x'' = C e^{-h(t_2-t)},$$

wenn  $t$  den Augenblick des ersten Umkehrens bedeutet. Man erhält aus diesen Gleichungen:

$$h = \frac{\log x' - \log x''}{(t_2 - t_1) \log e}.$$

$C$  oder  $C/m$  wird gefunden durch Subtraction der beiden ersten Gleichungen (5):

$$(8) \quad \frac{C}{m} = \frac{x_1 - x_2}{\left(1 + \frac{2hn}{m}\right) (e^{-nT_1} + e^{-nT_2}) + (e^{-hT_1} - e^{-hT_2})}.$$

**b. Die Versuche.** 1. Stahldraht. Der Stahldraht hatte einen Durchmesser von 1,6 mm; als dünner Draht wurde erst Neusilber (Durchmesser 0,105 mm) gewählt und an zwei Tagen eine Reihe Versuche angestellt. Da sich aber besonders am zweiten Tage der Widerstand beim Ausdehnen und Zusammenziehen infolge der Härte des Neusilberdrahtes

nicht unbeträchtlich änderte, so wurde ein Platindraht benutzt (Durchmesser 0,08 mm), mit welchem, obwohl  $E$  viel kleiner war, besser unter sich übereinstimmende Resultate erhalten wurden. Als Beispiel theile ich folgenden Versuch mit, den ersten am 26. Sept. 1880:

1. Ruhelage des Galvanometers 103,8.

Die Gewichte wurden verschoben, der Draht dadurch gespannt, folgende Umkehrpunkte wurden beobachtet:

$x_1$	171,0	also erster Ausschlag	67,2
$x_2$	138,3	$x_2 - x_1$	32,7
$x_3$	147,7	$x_3 - x_1$	23,3

2. Während des langsamen Zurückkehrens waren:

125,0	120,0	116,0	resp. die Ruhelagen,
70,0 sc.	95,5 sc.	121,0 sc.	nach dem ersten Ausschlag.

3. Mittelst des Magnetinductors wurden bestimmt:

$$a = 169,8 \quad b = 71,1,$$

und nach dem Einschalten von 1 S.-E.:

$$a = 88,6 \quad b = 40,3.$$

4. Die Schwingungsdauer war 6,44 sc.

Jetzt konnten berechnet werden:

aus den Beobachtungen sub 2 und den ähnlichen an diesem Tage

$$h = 0,0114,$$

aus 3. der Widerstand  $r = 1,067$  S.-E.,

aus  $a$  und  $b$ :

$$\lambda \text{ und weiter } \log m = 9,40663 \quad \log n = 9,12552$$

$$e^{-nT_1} = 0,4227 \quad e^{-nT_2} = 0,1787 \quad \frac{2\lambda n}{m} = 0,01$$

$$e^{-hT_1} = 0,9291 \quad e^{-hT_2} = 0,8633 \quad e^{-hT_3} = 0,8021,$$

mit welchen Werthen mittelst (8):

$$\log \frac{C}{m} = 1,6856.$$

Hieraus  $X_2 - X_1 = 29,2$  und  $X_3 - X_1 = 17,0$ ,  
wodurch man für die Entfernung von  $X$  bis  $x_1$  im Augenblick des ersten Umkehrens erhält<sup>1)</sup>:

resp. 20,5 und 20,6.

Also:  $X = 67,2 - 20,55 = 46,65.$

1) Bei dieser Berechnung wurde der schon bekannte Werth von  $\lambda$  benutzt.

Multiplicirt man diesen Werth mit  $e^{hT} = 1,076$  (Gl. 7), so ergibt sich:

$$p = 50,20.$$

Am folgenden Tage wurde  $E = 528$  bestimmt, der Ausschlag, den eine Temperaturänderung von  $1^\circ \text{C.}$  beim Widerstande  $= 1 \text{ S.-E.}$  verursacht. Die Temperaturänderung ist also:

$$\vartheta = \frac{p \times r}{E} = 0,1042.$$

Nach diesen Versuchen wurden die Gewichte zurückgeschoben u. s. w.

Folgende Tabellen enthalten die wichtigsten Data:

26. September 1880.

Spannendes Gewicht 21,715 kg.

Temperatur  $17,1^\circ$ .

Nummer des Versuchs u. Ursache der Temperaturveränderung	Erster Ausschlag	$x_2 - x_1$	$x_3 - x_1$	$a$	$b$	1 S.-E. eingeschaltet	
						$a$	$b$
1 Ausdehnen . . . .	67,2	32,7	23,3	169,8	71,1	88,6	40,3
2 Zusammenziehen . .	68,1	32,7	23,8	167,8	70,6	—	—
3 Ausdehnen . . . .	66,8	32,4	22,9	166,7	70,3	87,6	40,2
4 Zusammenziehen . .	67,3	32,7	24,0	164,4	69,5	86,6	39,7
5 Ausdehnen . . . .	65,0	31,6	22,2	165,0	69,9	—	—
6 Zusammenziehen . .	66,5	32,3	23,8	163,15	69,65	—	—
7 Ausdehnen . . . .	64,4	31,8	20,4	163,15	69,65	—	—
8 Zusammenziehen . .	66,0	32,5	23,9	162,1	69,2	—	—

woraus berechnet wurde:

Nr.	$\log \frac{C}{m}$	$X_2 - X_1$ und Entfernung $X$ bis $x_1$		$X_3 - X_1$ und Entfernung $X$ bis $x_1$		$p = X e^{hT}$	Widerstand $r$	$\vartheta = \frac{p \times r}{E}$
1	1,6856	29,2	20,5	17,0	20,6	50,2	1,096	0,1042
2	1,6856	29,2	20,5	17,5	21,0	50,9	1,089	0,1050
3	1,6816	28,9	20,3	16,6	20,3	50,0	1,104	0,1046
4	1,6856	29,2	20,5	17,7	21,1	50,0	1,110	0,1051
5	1,6708	28,2	19,8	16,1	19,7	48,8	1,102	0,1018
6	1,6803	28,8	20,2	17,5	20,9	49,4	1,114	0,1043
7	1,6735	28,4	20,0	14,3	18,5	48,6	1,114	0,1026
8	1,6830	29,0	20,4	17,6	21,0	48,7	1,117	0,1030

$$\vartheta = 0,1038$$

Der dünne Draht wurde verschoben und am folgenden Tage eine Versuchsreihe angestellt.

27. September 1880.

Spannendes Gewicht 21,715 kg.

Temperatur 17,0°.

Nummer des Versuchs u. Ursache der Temperatur- veränderung	Erster Aus- schlag	$x_2 - x_1$	$x_3 - x_1$	$a$	$b$	1 S.-E. eingeschaltet	
						$a$	$b$
1 Ausdehnen . . . .	65,7	30,7	21,0	159,4	67,7	85,3	39,0
2 Zusammenziehen . .	64,0	30,2	21,1	152,8	65,4	83,3	38,3
3 Ausdehnen . . . .	56,7	26,4	17,4	145,3	62,8	—	—
4 Zusammenziehen . .	64,6	30,2	21,7	156,1	66,7	—	—
5 Ausdehnen . . . .	57,3	26,4	17,7	150,0	64,4	—	—
6 Zusammenziehen . .	65,8	30,7	21,8	157,8	67,4	—	—

$$h = 0,0093 \quad T = 6,44 \text{ sc.} \quad \log m = 9,40575 \quad \log n = 9,11904$$

$$e^{-nT_1} = 0,4281 \quad e^{-nT_2} = 0,1833 \quad \frac{2hn}{m} = 0,01$$

$$e^{-hT_1} = 0,9418 \quad e^{-hT_2} = 0,8870 \quad e^{-hT_3} = 0,8353.$$

Hieraus wurde berechnet:

Nr.	$\log \frac{C}{m}$	$X_3 - X_1$ und Entfernung $X$ bis $x_1$		$X_3 - X_1$ und Entfernung $X$ bis $x_1$		$p = X e^{hT}$	Wider- stand $r$	$\vartheta = \frac{p \times r}{E}$
1	1,6597	27,9	19,55	15,95	19,55	49,0	1,15	0,1065
2	1,6526	27,5	19,25	16,15	19,55	47,35	1,20	0,1072
3	1,5942	24,0	16,8	13,05	16,35	42,6	1,26	0,1016
4	1,6526	27,5	19,25	16,75	19,95	47,8	1,73	0,1061
5	1,5942	24,0	16,8	13,35	16,55	43,1	1,22	0,1012
6	1,6597	27,9	19,55	16,75	20,1	48,85	1,16	0,1069

$$\vartheta = 0,1049$$

Zur Bestimmung von  $E$  wurde die oben erwähnte Kette  
gebildet; deren Widerstand  $R = 4,08$  S.-E.

27. September 1880.

Eingeschalteter Widerstand S.	Temperatur des Wassers $t$	Doppelter Ausschlag $2u$	Doppelter Ausschl. bei 1 S.-E. — 1°C. $2E$
150	17,6	121,45	1063,3
170	17,5	107,2	1066,4
270	17,4	66,9	1054,0
130	17,3	135,15	1047,0
110	17,2	158,6	1052,0

$$1056$$

$$E = 528$$

Statt des dünnen Neusilberdrahtes wurde der Platindraht benutzt.

30. September 1880.

Spannendes Gewicht 21,715 kg.

Temperatur 16,7°.

Nummer des Versuchs u. Ursache der Temperatur- veränderung	Erster Aus- schlag	$x_2 - x_1$	$x_3 - x_1$	$a$	$b$	1 S.-E. eingeschaltet	
						$a$	$b$
1 Ausdehnen . . . .	48,2	22,4	16,4	166,5	68,3	76,1	35,3
2 Zusammenziehen . .	48,4	22,4	16,7	166,4	68,7	—	—
3 Ausdehnen . . . .	46,5	21,8	16,0	165,5	68,4	—	—
4 Zusammenziehen . .	48,4	22,8	17,0	166,1	68,6	—	—
5 Ausdehnen . . . .	46,7	21,8	16,0	165,1	68,1	—	—
6 Zusammenziehen . .	48,2	22,6	17,0	166,0	68,3	76,3	35,5

$$h = 0,0127 \quad T = 6,55 \text{ sc.} \quad \log m = 9,39503 \quad \log n = 9,13101$$

$$e^{-nT_1} = 0,4125 \quad e^{-nT_2} = 0,1701 \quad \frac{2hn}{m} = 0,014$$

$$e^{-hT_1} = 0,9202 \quad e^{-hT_2} = 0,8467 \quad e^{-hT_3} = 0,7791$$

Am 1. October wurde bestimmt  $E = 295$ .

Hieraus wurde berechnet.

Nr.	$\log \frac{C}{m}$	$X_2 - X_1$ und Entfernung $X$ bis $x_1$	$X_3 - X_1$ und Entfernung $X$ bis $x_1$	$p = X e^{hT}$	Wider- stand $r$	$\vartheta = \frac{p \times r}{E}$
1	1,5284	19,65 13,9	11,5 13,85	37,3	0,843	0,1066
2	1,5284	19,65 13,9	11,8 14,1	37,4	0,843	0,1069
3	1,5166	19,15 13,55	11,2 13,5	35,85	0,852	0,1036
4	1,5361	20,0 14,15	12,0 14,35	37,1	0,843	0,1060
5	1,5166	19,15 13,55	11,2 13,5	36,05	0,852	0,1041
6	1,5323	19,85 14,05	12,05 14,35	36,95	0,843	0,1056

$$\vartheta = 0,1054$$

2. Neusilberdraht. Der Neusilberdraht hatte einen Durchmesser von 1,5 mm; der dünne Draht war wieder Platin (Durchmesser 0,08 mm). Die Versuche wurden in gleicher Weise wie beim Stahldraht angestellt, nur wurde ausserdem, zur genauen Controlirung der Empfindlichkeit des Galvanometers, der Werth von  $E$  wiederholt bestimmt. Dazu wurde von anderen Stücken Neusilberdraht und Platindraht eine Kette gebildet, mit welcher am 14. Sept. 1881 dreimal der Werth von  $E$  bestimmt wurde; das Mittel war 201,0.

Am 15. Sept., gleich nach der Messung der Temperaturänderungen wurde der Werth von  $E$  gefunden: 204,55.



Am 17. Sept. wurde der Werth von  $E$  dieser Kette mit dem der aus den benutzten Drähten gebildeten Kette verglichen.

Es wurde gefunden:

mit der Kette vom 14. und 15. Sept. . . .  $E = 200,15$   
mit der aus den benutzten Drähten gebildeten Kette  $E = 202,3$

Hieraus findet man für den Werth von  $E$ :

14. Sept. 203,2      15. Sept. 206,8.

14. Sept. 1881.

Spannendes Gewicht 17,134 kg.

Temperatur 16,4.

Nummer des Versuchs u. Ursache der Temperatur- veränderung	Erster Aus- schlag	$x_2 - x_1$	$x_3 - x_1$	$a$	$b$	1 S.-E. eingeschaltet	
						$a$	$b$
1 Ausdehnen . . .	46,5	19,3	14,1	192,3	78,45	87,4	39,9
2 Zusammenziehen .	44,9	19,7	13,8	189,8	78,0	—	—
3 Ausdehnen . . .	45,2	19,1	13,4	190,95	78,25	—	—
4 Zusammenziehen .	44,8	19,8	13,5	191,15	78,1	87,0	39,9
5 Ausdehnen . . .	45,7	19,1	13,7	191,2	78,2	—	—
6 Zusammenziehen .	44,6	19,7	13,5	190,95	78,0	—	—
7 Ausdehnen . . .	46,0	19,5	13,7	193,2	79,1	87,9	40,6
8 Zusammenziehen .	44,8	19,8	13,8	192,65	78,9	88,4	40,45
9 Ausdehnen . . .	45,5	18,6	13,2	194,1	79,3	—	—
10 Zusammenziehen .	45,2	19,9	13,7	192,9	78,8	—	—

$h = 0,0088$     $T = 6,35$  sc.    $\log n = 9,14834$     $\log m = 9,42254$

$$e^{-nT_1} = 0,4092 \quad e^{-nT_2} = 0,1675 \quad \frac{2hn}{m} = 0,0093$$

$$e^{-hT_1} = 0,9458 \quad e^{-hT_2} = 0,8945 \quad e^{-hT_3} = 0,8460$$

Hieraus ergibt sich:

Nr.	$\log \frac{C}{m}$	$X_2 - X_1$ und Entfernung $X$ bis $x_1$	$X_3 - X_1$ und Entfernung $X$ bis $x_1$	$p = X e^{hT}$	Wider- stand $r$	$\vartheta = \frac{p \times r}{E}$
1	1,4841	17,6   12,5	10,95   12,90	35,75	0,826	0,1453
2	1,4930	17,95   12,75	10,6   12,75	34,0	0,846	0,1416
3	1,4795	17,4   12,35	10,3   12,35	34,75	0,836	0,1429
4	1,4952	18,05   12,8	10,25   12,5	34,0	0,836	0,1398
5	1,4795	17,4   12,35	10,6   12,6	35,15	0,836	0,1446
6	1,4930	17,95   12,75	10,3   12,5	33,85	0,836	0,1392
7	1,4898	17,8   12,65	10,6   12,7	35,1	0,838	0,1447
8	1,4965	18,1   12,85	10,6   12,8	33,65	0,838	0,1387
9	1,4693	17,0   12,05	10,25   12,25	35,1	0,828	0,1431
10	1,4987	18,2   12,9	10,55   12,75	34,1	0,838	0,1406

$$\vartheta = 0,1421$$

Der dünne Platindraht wurde verschoben.

15. Sept. 1881.

Spannendes Gewicht 17,134 kg.

Temperatur 16,1°.

Nummer des Versuchs u. Ursache der Temperatur- veränderung	Erster Aus- schlag	$x_2 - x_1$	$x_3 - x_1$	$a$	$b$	1 S.-E. eingeschaltet	
						$a$	$b$
1 Ausdehnen . . . .	46,7	19,1	13,9	196,5	80,3	88,75	40,7
2 Zusammenziehen . .	45,55	19,95	13,85	195,55	80,3	—	—
3 Ausdehnen . . . .	45,45	18,45	13,45	195,0	80,1	—	—
4 Zusammenziehen . .	45,15	19,65	13,25	195,1	80,0	88,6	40,85

$$h = 0,0085 \quad T = 6,35 \text{ sc.} \quad \log n = 9,14834 \quad \log m = 9,42254$$

$$\left. \begin{aligned} e^{-hT_1} &= 0,9478 \\ e^{-hT_2} &= 0,8983 \\ e^{-hT_3} &= 0,8513 \\ \frac{2hn}{m} &= 0,009 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{gelten auch für} \\ &7, 8, 9 \text{ und } 10 \\ &14. \text{ Sept.} \end{aligned} \quad \begin{aligned} e^{-nT_1} &= 0,4092 \\ e^{-nT_2} &= 0,1675 \end{aligned}$$

Hieraus erhält man:

Nr.	$\log \frac{C}{m}$	$X_2 - X_1$ und Entfernung $X$ bis $x_1$		$X_3 - X_1$ und Entfernung $X$ bis $x_1$		$p = X e^{hT}$	Wider- stand $r$	$\vartheta = \frac{p \times r}{E}$
1	1,4808	17,45	12,4	10,9	12,8	35,95	0,819	0,1423
2	1,4998	18,25	12,95	10,7	12,9	34,35	0,829	0,1377
3	1,4658	16,85	11,95	10,55	12,45	34,45	0,829	0,1382
4	1,4932	17,95	12,75	10,15	12,4	34,3	0,829	0,1375

$$\vartheta = 0,1389$$

Mit demselben Neusilberdraht ist die Proportionalität der Temperaturänderung mit dem Spannungsgewichte untersucht und bestätigt worden. An drei Tagen, 15., 16. und 17. Juni 1881, sind diese Versuche angestellt.

Spannung	$\vartheta$ Mittel aus 8 Versuchen	$\vartheta$ für 1 kg
13,05 kg	0,1063°	0,00814
21,30 „	0,1725°	0,00812

Durch Versuche ist weiter die Proportionalität der thermoelectromotorischen Kraft und Temperaturänderung an den Contactstellen Stahl-Neusilber, Stahl-Platin und Neusilber-Platin nachgewiesen zwischen den Grenzen 0°, Wasser von der Zimmertemperatur, Temperatur des siedenden Aethers

und Wassers. — Schliesslich habe ich keinen Unterschied constatiren können zwischen den Werthen von  $E$ , mochte der Hauptdraht gespannt werden oder nicht, oder die Löthung geschmolzen, die Drähte stark erhitzt und von neuem gelöthet werden, sodass weder gegen die Methode, durch welche  $E$  bestimmt, noch durch welche  $E$  in Rechnung gezogen worden, etwas einzuwenden ist.

Aus diesen Versuchen folgt also:

bei Stahldraht			bei Neusilberdraht		
26. Sept. 1880	0,1038		14. Sept. 1881	0,1421	
27. „ 1880	0,1049		15. Sept. 1881	0,1389	
30. „ 1880	0,1054				
Mittel 0,1047			0,1405		

## II. Ausdehnungscoefficienten der gespannten Drähte.

Um den Draht in der beschriebenen Vorrichtung auf zwei verschiedene constante Temperaturen bringen zu können, befand er sich in der Axe einer Messingröhre, die von einer weiteren umgeben war; durch den Zwischenraum wurde entweder strömendes Wasser aus der Wasserleitung oder Dampf geleitet. Die Enden der inneren Röhre waren durch kleine auf dem Drahte leicht verschiebbare Korke geschlossen. Die äussere Röhre war gegen Wärmeverlust durch eine dicke Korksicht geschützt.

In einer Entfernung von den Endpunkten, etwa 5 cm, waren zwischen die äussere und innere Röhre zwei Röhrenchen gelöthet, welche durch kleine Planglasplatten geschlossen waren, durch die der Draht zu sehen war. Auf diesem wurden mit einer ganz feinen Nadel zwei Striche gezogen und ihnen gegenüber zwei Ablesungsmikroskope mit Mikrometerschraube fest aufgestellt.

Mit dieser Vorrichtung wurde bestimmt:

### Der Ausdehnungscoefficient vom Stahldraht.

December 1880. Entfernung der beiden Striche auf dem Drahte 330,7 mm. Grösse der Spannung 19 kg (Mittel der Spannung des „gespannten“ und „nicht gespannten“ Drahtes). 1287 Theile des Kopfes der Mikrometerschraube hatten einen Werth von 1 mm.

Temperaturunterschied des Wassers und des Dampfes	Ausdehnung in Theilungen d. Kopfes der Schraube	Ausdehnungs- coefficient
86,8°	428,4	0,000 011 59
86,4	425,0	11 56
86,65	425,5	11 54

$$\alpha = 0,000\ 011\ 56$$

Der Ausdehnungscoefficient vom Neusilberdraht.

October 1881. Entfernung der beiden Striche auf dem Drahte 324 mm. Grösse der Spannung 16 kg. Werth von 10 Schraubenumdrehungen (1000 Theilungen)

beim einen Mikroskope = 0,9293 mm

beim anderen „ = 0,9689 mm.

$10^{-8} \alpha = 1739 \quad 1725 \quad 1731 \quad 1741 \quad \text{Mittel } 1734.$

Derselbe Werth wurde gefunden bei Spannungen von 12 und 20 kg.<sup>1)</sup>

### III. Specifische Wärme.

Zur Bestimmung der specifischen Wärme wurde die Mischungsmethode gewählt; die Drähte wurden in kleine Stückchen zertheilt, sodass das Calorimeter binnen einer halben Minute die Maximaltemperatur erreicht hatte und Correctionen nicht nothwendig waren.<sup>2)</sup> Der Rührer, ein Stück Drahtnetz, wurde fortwährend in Bewegung erhalten. Zur Vermeidung der mit dem Gebrauche eines Thermometers verbundenen Nachtheile, als: die Wärmecapacität, der todte Gang, die Schwierigkeit dem Thermometer eine passende Stelle im Calorimeter zu geben, wurde eine Thermonadel aus dünnem Neusilber- und Platindraht benutzt, deren Löthstelle sich gerade unter dem Rührer befand und dessen Bewegung theilte. Die beiden anderen Enden der Drähte waren an die Galvanometerdrähte angelöthet; die Löthstellen befanden sich in einem grossen Glase mit Wasser, welches fortwährend umgerührt wurde. Die Schwingungsdauer des Thomson'schen Galvanometers wurde bis auf etwa 2 Secunden

1) Rühlmann, Handbuch p. 526. — Joule, Proc. Roy. Soc. 8. p. 564. 1857.

2) Müller-Pfaundler's Physik, 2. (2) p. 297.

geänd  
lorime  
von et  
war.  
nach  
Platin  
innerh  
bekan  
nicht  
berücl  
A  
nutzt  
Die M  
röhre  
war.  
Metal  
theile

28.

desse  
Eine  
schla  
21,3

fund

obig  
der  
lent  
An

geändert; eine Temperaturänderung der Löthstelle im Calorimeter von  $1^{\circ}$  C. verursachte dann eine Ablenkung von etwa 14 mm; sodass  $\frac{1}{140}$  Grad Celsius zu beobachten war. Zur genaueren Bestimmung dieser Zahl wurde gleich nach der calorimetrischen Messung die Löthstelle Neusilber-Platin mit schmelzendem Eis umgeben; die Ablenkung blieb innerhalb der Scala; also brauchte der Widerstand nicht bekannt zu sein. Die thermoelectromotorische Kraft war nicht völlig der Temperaturänderung proportional; dies wurde berücksichtigt.

Als Erhitzungsapparat wurde dieselbe Vorrichtung benutzt wie bei der Bestimmung der Ausdehnungscoefficienten. Die Metallstückchen wurden in einem ganz dünnen Proberröhrchen erwärmt, welches in die innere Röhre eingesetzt war. Wenigstens 20 Minuten circuirte der Dampf, ehe das Metall in das Calorimeter geworfen wurde. Als Beispiel theile ich folgenden Versuch mit:

28. März 1881.	Calorimeter mit Wasser	. .	95,979 g
	Calorimeter und Rührer	. .	16,101
			<hr/> 79,878
	Auf den leeren Raum bezogen		85
	Wasserwerth des Calorimeters		2,057
	Der Wasserwerth		<hr/> 82,020 g

12,462 g Stahldraht von  $100,2^{\circ}$  gaben im Calorimeter, dessen Temperatur  $10,55^{\circ}$  war, eine Ablenkung von 21,3 mm. Eine Temperaturänderung von  $1^{\circ}$  C. verursachte einen Ausschlag von 13,96. Die Temperaturerhöhung betrug also  $21,3/13,96$  Grad. Die specifische Wärme 0,1133.

Ah drei anderen Tagen wurde gefunden:

$$0,1139 [1] \quad 0,1131 \quad 0,1120 \quad c = 0,1130.$$

Für Neusilberdraht wurde in ähnlicher Weise gefunden:

$$0,09611 \quad 0,09624 \quad 0,09625 \quad 0,09621 \quad c = 0,0962.$$

#### IV. Das mechanische Wärmeäquivalent.

Zur Beurtheilung, ob die mechanische Wärmetheorie obige Temperaturänderungen erklären kann, wurde mittelst der Thomson'schen Formel das mechanische Wärmeäquivalent berechnet:

$$\vartheta = - \frac{(273 + t) \alpha P}{A w c}.$$

## 1. Stahldraht.

$\vartheta = 0,1047,$   
 $\alpha = 0,000\ 011\ 56,$   
 $t = 17^{\circ},$   
 $P = 21,715\ \text{kg},$   
 $300\ \text{mm wogen } 4,2159\ \text{g},$   
 $w = 0,014\ 053\ \text{kg},$   
 $c = 0,1130,$   
 $A = 437,8.$

## 2. Neusilberdraht.

$\vartheta = 0,1405,$   
 $\alpha = 0,000\ 017\ 34,$   
 $t = 16,2^{\circ},$   
 $P = 17,134\ \text{kg},$   
 $263,25\ \text{mm wogen } 3,909\ \text{g},$   
 $w = 0,014\ 849\ \text{kg},$   
 $c = 0,0962.$   
 $A = 428,1.$

Da Edlund durch seine Versuche bewiesen hat, dass das Verhältniss der Temperaturänderungen bei verschiedenen Metallen durch die Thomson'sche Formel berechnet werden kann, war es hinreichend, bei einem Metalle zu untersuchen, ob dasselbe auch für den absoluten Werth gälte.

Aus den mitgetheilten Versuchen mit Stahldraht, sowie mit Neusilberdraht glaube ich, dass dies bejaht werden kann, und dass also diese Versuche folgenden Schluss zu ziehen erlauben:

Die mechanische Wärmetheorie erklärt vollkommen die Temperaturänderungen beim Ausdehnen und Zusammenziehen von Metalldrähten.

Angenehm ist es mir, Hrn. Prof. Bosscha, Director des hiesigen Polytechnicums, meinen besten Dank auszusprechen, nicht nur für die Bereitwilligkeit, mit der er mir den Zugang zum physikalischen Cabinet gestattet hat, sondern auch für seine Theilnahme in dieser Untersuchung; und Hrn. Prof. van de Sande Bakhuyzen, Director der Leydener Sternwarte, der die Ablesungsmikroskope zu meiner Verfügung stellte.

Delft, October 1881.

## II. *Erörterungen zur Fourier-Poisson'schen Wärmeleitungstheorie; von W. Hergesell.*

### Einleitung.

Die Bedenken, welche wiederholt und mit immer stärkerer Betonung gegen die Fourier-Poisson'sche Theorie der Wärmeleitung geltend gemacht worden sind, beruhen im wesentlichen darauf, dass 1) in dieser Theorie keine Rede ist von der Veränderlichkeit der specifischen Wärme, 2) dass sie ferner auf die Dehnung der wärmeleitenden Körper keine Rücksicht nimmt und das Leitungsvermögen constant setzt, endlich 3) dass der Wärmeaustausch zwischen zwei einander berührenden Körpern der Differenz  $U - U'$  ihrer Grenztemperaturen  $U, U'$  proportional gesetzt wird.

Gegenüber den sehr interessanten Versuchen, die Theorie der Wärmeleitung so zu begründen, dass Einwürfe dieser Art ausgeschlossen werden, möge es mir gestattet sein, diese Bedenken selbst vom Standpunkte der Fouriers'schen Theorie aus einer genauen Prüfung zu unterziehen.

Meine Arbeit zerfällt in drei Abschnitte.

Im ersten Abschnitte<sup>1)</sup> weise ich nach, dass die Schwierigkeiten, welche sich an die unter 1) und 3) erwähnten Punkte zu knüpfen scheinen, gar nicht vorhanden sind, wofern man nur das Temperaturmaass *u* Fourier's<sup>2)</sup> wirklich beibehält. Unter dieser Voraussetzung findet sich zur Einführung der veränderlichen specifischen Wärme in der Theorie selbst gar keine, bei der thermometrischen Prüfung ihrer Resultate nur eine sehr beschränkte Veranlassung, beschränkt auf die Theorie des zu verwendenden Thermometers  $T$  (§ 8, 9).

Zur Zeit Fourier's war die Veränderlichkeit der specifischen Wärme noch nicht entdeckt; es kann daher Fourier nicht zum Vorwurf gereichen, wenn er annahm, dass gleichen

1) Die Darstellung dieses Abschnittes knüpft an die genauen Erörterungen an, welche Hr. Prof. Christoffel in Strassburg i/E. in seinen Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen gibt.

2) Vgl. Fourier, *Théorie de la chaleur*. Chap. 1. Art. 29. „En général, les températures sont des nombres proportionels aux quantités de chaleurs ajoutées.“

Wärmезunahmen stets gleiche Volumenzunahmen entsprächen<sup>1)</sup>, dass er also die von ihm scharf definirte Temperatur  $u$ <sup>2)</sup>, die wir die mathematische nennen wollen, zur Temperatur  $g$  in Celsiusgraden proportional, mithin die specifische Wärme constant setzte. Seit den Entdeckungen von Dulong und Petit aber musste dies als unzulässig anerkannt werden. Denn wenn man in den Bedingungen der Fourier'schen Theorie das Verhältniss von  $u$  zu  $g$  constant, also kurzweg  $u = g$  setzt, wie dies besonders in neuester Zeit geschehen ist, so hat man entweder die specifische Wärme constant gesetzt oder die sämtlichen Fourier'schen Hypothesen über den Wärmeaustausch abgeändert, nämlich ersteres, wenn man nichtsdestoweniger die Fourier'sche Definition von  $u$  beibehält, letzteres, wenn man die Veränderlichkeit der specifischen Wärme anerkennt.

Im letzteren Falle ist das  $u$  Fourier's eine Function von  $g$  und als solche durch Interpolation darstellbar (§ 6, 7). Führt man durch solche Formeln in die Bedingungsgleichungen Fourier's  $g$  an Stelle von  $u$  ein, so erhält man die neuen Bedingungsgleichungen in ähnlichen verwickelten Formen wie sie in neuerer Zeit zur Verbesserung der unhaltbaren Theorie vorgeschlagen worden sind, die sich für  $u = g$  ergibt.

Der zweite Abschnitt behandelt die Frage, betreffend die Dehnung durch die Wärme und das Leitungsvermögen, aber von einem anderen Gesichtspunkte aus.

Wie das Leitungsvermögen sich in der Wirklichkeit mit der Dehnung ändert, wird sich bis auf weiteres wohl kaum entscheiden lassen. An Stelle dieser Frage, zu deren Beantwortung mir die Mittel fehlen, setze ich die folgende, welche Hypothesen über das Leitungsvermögen erforderlich sind, wenn man die Theorie Fourier's ungeändert und scheinbar ohne Rücksicht auf die Dehnung der Körper durch die Wärme beibehält. Die Hypothese, zu welcher man durch diese Bedingung genöthigt ist (§ 4), kommt darauf hinaus, dass bei zunehmender Dehnung das Leitungs-

1) Fourier, Theorie de la chaleur. Chap. 1. Art. 27.

2) Siehe Anmerk. 1 auf voriger Seite.



vermögen in sehr einfacher Weise ab-, der Wärmestrom dagegen zunimmt, wofern bei der Dehnung nicht zugleich ein anderes Temperaturgefälle eintritt.

Im dritten Abschnitte benutze ich den Anlass, welchen die Discussion der Fourier'schen Theorie mir darbietet, zur Vervollständigung derselben durch die Aufstellung derjenigen Bedingungen, welche sich auf die bei der Wärmeleitung auftretenden Unstetigkeiten beziehen, und gebe die Lösung der hierbei auftretenden einfachsten Fälle.<sup>1)</sup>

### Erster Abschnitt.

#### Mathematische und thermometrische Temperatur.

§ 1. Als mittlere Temperatur eines Körpers  $K$  bezeichnet Fourier eine Zahl  $u$ , welche dem Wärmeinhalt  $w$  von  $K$  direkt, der in Kilogrammen ausgedrückten Masse  $m$  von  $K$  umgekehrt proportional ist. Setzt man demgemäss:

$$u = \frac{w}{c \cdot m},$$

so wird  $c = w$  für  $u = 1$  und  $m = 1$ ; also ist  $c$  der Wärmeinhalt eines Kilogrammes für  $u = 1$ .

Hier ist nicht von einem absoluten, sondern nur von einem relativen Wärmeinhalt die Rede, indem Fourier den Wärmeinhalt eines Körpers  $= 0$  setzt, wenn letzterer lange genug in schmelzendes Eis eingetaucht worden ist.

Wir nennen  $u$  die mathematische Temperatur von  $K$ ; dann ist der Wärmeinhalt  $w$  die Anzahl von Wärmeeinheiten, welche  $K$  bei der Temperatur  $u$  mehr enthält als bei der Temperatur  $u = 0$ .

Die Zahlen  $w$  und  $c$  werden um so kleiner, je grösser, und um so grösser, je kleiner die Wärmemenge ist, welche man zur Einheit wählt: auf den Zahlenwerth von  $u$  hat die Wahl der Wärmeeinheit keinen Einfluss.

1) Auf die an der Uebergangsfläche, d. h. derjenigen Fläche, längs deren beiden Seiten die leitende Substanz sich in verschiedenen Aggregatzuständen befindet, geltende Grenzbedingung bin ich von Hrn. Prof. Dr. Christoffel aufmerksam gemacht worden.

Bei der Temperatur des schmelzenden Eises ist  $u = 0$ ; der zweite Fixpunkt, für den  $u = 1$  wird, muss somit festgestellt werden. Fourier nimmt hierfür die Temperatur des bei einem Druck von 760 mm siedenden Wassers, sodass, während ein Thermometer von  $0^\circ$  auf  $100^\circ$  C. steigt,  $u$  von 0 bis 1 wächst. (Für numerische Zwecke ist es geeigneter,  $c$  so zu wählen, dass  $u = 1$  wird bei  $1^\circ$  C.)

§ 2. Diesem mathematischen Maasse für Temperaturen muss nun das thermometrische Temperaturmaass gegenübergestellt werden. Zunächst hat es, wenigstens principiell, keine Schwierigkeit, den Begriff des 100theiligen Thermometers, welcher für Luft, Weingeist, Quecksilber feststeht, in gleicher Weise auf Thermometer aus jeder beliebigen Substanz  $K$  auszudehnen.

Dann soll die Anzahl  $g$  von Graden, welches dieses Thermometer zeigen würde, als seine thermometrische Eigentemperatur bezeichnet werden, und das überträgt sich dann sofort auf jeden Körper von dieser Substanz  $K$  und auf jeden Theil desselben. Ist  $u$  die mathematische Temperatur bei der „thermometrischen Eigentemperatur“  $g$ , so ist  $u$  Function von  $g$  und als solche zu untersuchen (§ 6).

Ferner heisst  $\gamma$  die spezifische Wärme von 1 Kilogramm dieser Substanz, wenn demselben  $\gamma \cdot \delta g$  Wärmeeinheiten zugeführt werden müssen, damit seine Eigentemperatur von  $g$  auf  $g + \delta g$  steigt.

Die thermometrische Eigentemperatur ist kein absolutes Wärmemaass, da 1) die gleiche Zahl  $g$  für gleich grosse Mengen verschiedener Substanzen ungleichen Wärmeinhalten entspricht, und 2) für die gleiche Substanz gleich grosse Aenderungen  $\Delta g$  an verschiedenen Stellen  $g$  der Scala ungleiche Aenderungen des Wärmeinhalts messen. (Veränderlichkeit der specifischen Wärme  $\gamma$ .)

§ 3. Die Constante  $c$  ist also der Wärmeinhalt eines Kilogrammes bei  $100^\circ$  thermometrischer Eigentemperatur. Fourier nennt sie specifische Wärme pro Kilogramm, was auf seine Wärmeleitungstheorie keinen Einfluss hat, da derselbe mit dem mathematischen Temperaturmaasse  $u$  rechnet, also nicht in den Fall kommen kann, eine veränderliche

specifi  
führun  
specifi  
annim  
 $\gamma = c$   
 $c$  als

$\S$   
 $m$   
 $c$   
 $w$   
 $u$   
 $g$

ausse

(1)

um

bring

zuge

inha

(2)

gibt

(3)

sche

setz

Wä

trif

son

zu

(4)

so

mo

specifische Wärme  $\gamma$  einzuführen. Bei numerischen Ausführungen hat Fourier allerdings die Constante  $c$  als eine specifische Wärme benutzt, indem er  $u$  zu  $g$  proportional annimmt, was  $100u = g$  und, wie das Folgende (§ 5) zeigt,  $\gamma = c/100$  gibt. Um Verwechselungen auszuschliessen, möge  $c$  als die Temperaturconstante bezeichnet werden.

§ 4. Sei also:

$m$  das Gewicht von  $K$  in Kilogrammen,

$c$  seine Temperaturconstante,

$w$  sein Wärmehalt,

$u$  seine mathematische,

$g$  seine thermometrische Eigentemperatur.

Für  $g = g_1$  werde  $u = 1$ , was bei Fourier  $g_1 = 100$  vorausgesetzt. Dann ist nach § 1:

$$(1) \quad w = m \cdot c \cdot u;$$

um  $K$  auf die thermometrische Eigentemperatur  $g + \partial g$  zu bringen, müssen jedem Kilogramme  $\gamma \cdot \partial g$  Wärmeeinheiten zugeführt werden, was für  $K$  eine Vermehrung des Wärmehalts um:

$$(2) \quad \partial w = m \cdot \gamma \cdot \partial g$$

gibt. Aber da nach (1) auch  $\partial w = m \cdot c \cdot \partial u$  ist, so ist:

$$(3) \quad c \cdot \partial u = \gamma \cdot \partial g.$$

§ 5. Nimmt man, wie es bis in die neueste Zeit geschehen ist, an,  $u$  sei zu  $g$  proportional, so ist  $g = g_1 u$  zu setzen, und dann folgt aus (3)  $c = g_1 \cdot \gamma$ , d. h. die specifische Wärme  $\gamma$  findet sich constant.

Der Einwurf, die specifische Wärme  $\gamma$  constant zu setzen, trifft also nicht die Fourier'sche Theorie der Wärmeleitung, sondern alle diejenigen Anwendungen derselben, in denen  $u$  zu  $g$  proportional genommen wird.

§ 6. Betrachtet man  $\gamma$  als Function von  $g$ , so folgt:

$$(4) \quad c \cdot u = \int_0^g \gamma \cdot \partial g,$$

$$(5) \quad c = \int_0^{g_1} \gamma \cdot \partial g.$$

Ist eine Wärmeeinheit äquivalent mit  $\alpha$  Arbeitseinheiten, so ist also der Wärmehalt  $w = m \cdot c \cdot u$  von  $K$  bei  $g^0$  thermometrischer Eigentemperatur äquivalent mit  $\alpha \cdot w$ , d. h. mit:

$$(6) \quad A = \alpha \cdot m \int_0^g \gamma \cdot \partial g$$

Arbeitseinheiten, d. h. so viel Arbeitseinheiten enthält  $K$  bei  $g^0$  Eigentemperatur mehr als bei 0 Grad.

Im Ausdrucke (4) für  $u$  hängt nur die Constante  $c$  von derjenigen Temperatur  $g_1$  ab, für welche man  $u = 1$  setzen will. Aendert man also  $g_1$ , so ändert sich zwar  $c$  und  $u$ , aber alle Werthe von  $u$  werden im nämlichen Verhältnisse abgeändert oder deutlicher, mit der nämlichen Zahl multiplicirt:

Während also die mathematische Temperatur  $u$  von der Wärmeeinheit ganz unabhängig ist, wird sie durch eine Verlegung des zweiten Fixpunktes  $g_1$  nur im constanten Verhältnisse abgeändert.

Für gewöhnlich reicht es aus,  $\gamma$  interpolatorisch in der Form:

$$\gamma = \beta (1 + 2 \varepsilon g)$$

darzustellen, wobei sich für  $\varepsilon$  sehr kleine Werthe ergeben, deren höhere Potenzen gegen die erste vernachlässigt werden können. Das gibt:

$$cu = \beta (g + \varepsilon g^2);$$

nimmt man:

$$g_1 = 1,$$

so wird:

$$c = \beta (1 + \varepsilon), \quad u = \frac{g + \varepsilon g^2}{1 + \varepsilon}$$

oder mit gleicher Annäherung:

$$u = g + \varepsilon g \cdot (g - 1).$$

§ 7. Für unseren Zweck ist es nothwendig, zu ermitteln, inwieweit die Fourier'sche Theorie der Wärmeleitung überhaupt Veranlassung geben kann, auf den Begriff der specifischen Wärme Rücksicht zu nehmen.

Die Mischungsmethode zur Bestimmung der specifischen Wärme von  $K$  setzt voraus, dass man den erwärmten Körper  $K$  in eine Flüssigkeit  $w$  von bestimmter Gewichtsmenge und in diese ein Thermometer  $T$  eintaucht, welches letztere abgelesen wird, sobald alle Temperaturen constant geworden sind. Seien in diesem Schlusszustande:

$u_K, u_w, u_T$  die betreffenden mathematischen,  
 $g_K, g_w, g_T$  die thermometrischen Eigentemperaturen,  
 sodass  $g_T$  durch Ablesung erhalten wird.

Die Fourier'sche Theorie der Wärmeleitung unterscheidet sich bekanntlich von der Poisson'schen durch die Grenzbedingungen; aber es ist bekannt, dass aus beiden für den Schlusszustand  $u_K = u_w, u_w = u_T$  folgt. Also ist:

$$(A) \quad u_K = u_T,$$

wie wenn  $T$  in  $K$  selbst eingetaucht worden wäre.

Benutzen wir nun der Einfachheit wegen die interpolatorischen Formeln am Schlusse des vorigen Abschnittes, so ist zu setzen:

$$\gamma_K = \beta_K \cdot (1 + 2\epsilon_K g_K), \quad u_K = g_K + \epsilon_K \cdot g_K (g_K - 1),$$

$$\gamma_T = \beta_T \cdot (1 + 2\epsilon_T g_T), \quad u_T = g_T + \epsilon_T \cdot g_T (g_T - 1),$$

und man erkennt Folgendes:

- (1) Um die mathematische Temperatur von  $K$  zu finden, bedarf es beim obigen Versuche nur der genauen Kenntniss des Thermometers  $T$ , d. h. der Formel:

$$\gamma_T = \beta_T (1 + 2\epsilon_T g_T),$$

aus welcher die Formel für  $u_T$  folgt; dann ist, aus welcher Substanz auch  $K$  bestehen mag:

$$(A_1) \quad u_K = g_T + \epsilon_T g_T (g_T - 1).$$

- 2) Dagegen hat man für die „thermometrische Eigentemperatur“ von  $K$  zunächst:

$$g_K + \epsilon_K g_K (g_K - 1) = g_T + \epsilon_T g_T (g_T - 1).$$

Das gibt in erster Annäherung  $g_K = g_T$ , und in zweiter, bei welcher wir stehen bleiben müssen,

$$(B) \quad g_K = g_T + (\epsilon_T - \epsilon_K) g_T (g_T - 1).$$

- 3) Wenn man nun die spezifische Wärme von  $K$  nicht durch die Eigentemperatur von  $K$ , sondern wie üblich ist, durch die an  $T$  abgelesene Temperatur  $g_T$  ausdrückt, so darf in  $1 + 2\epsilon_K g_K$  für  $g_K$  nur die erste Annäherung benutzt werden, und dann folgt:

$$(C) \quad \gamma_K = \beta_K (1 + 2\epsilon_K g_T).$$

4) Hieraus muss der Ausdruck ( $A_1$ ) sich wieder ergeben. Es ist aber:

$$c_K u_K = \int_0^{g_K} \gamma_K \cdot \partial g_K,$$

ferner, wenn  $g_T = g$  gesetzt wird, mit Rücksicht auf (B):

$$\gamma_K \cdot \partial g_K = \beta_K (1 + 2\varepsilon_K g) (1 + [\varepsilon_T - \varepsilon_K] [2g - 1]) \partial g$$

$$\text{oder: } \gamma_K \cdot \partial g_K = \beta_K (1 + \varepsilon_K + \varepsilon_T [2g - 1]) \cdot \partial g,$$

da die zweite Annäherung nicht überschritten werden darf; endlich, da  $g$  von 0 bis  $g_T$  geht, wird:

$$c_K u_K = \beta_K [(1 + \varepsilon_K) g_T + \varepsilon_T g_T (g_T - 1)].$$

Für  $g_T = 1$  wird auch  $g_K = 1$ , also  $u_K = 1$ , mithin ist:

$$c_K = \beta_K (1 + \varepsilon_K),$$

und es folgt:

$$u_K = g_T + \frac{\varepsilon_T}{1 + \varepsilon_K} \cdot g_T (g_T - 1),$$

d. h.

$$u_K = g_T + \varepsilon_T \cdot g_T \cdot (g_T - 1),$$

da  $\varepsilon_T$ ,  $\varepsilon_K$  und die höheren Potenzen von  $\varepsilon_K$  vernachlässigt werden, also der Ausdruck ( $A_1$ ).

§ 8. Der Begriff der „thermometrischen Eigentemperatur“  $g_K$  von  $K$  im Gegensatze zur Temperatur  $g_T$ , welche das Thermometer  $T$  am Körper  $K$  zeigt, dürfte sich zur täglichen Anwendung in der Physik wohl wenig empfehlen, wenn er auch gelegentlich nicht abgewiesen werden kann, und alle Festsetzungen über spezifische Wärme implicite auf ihn Bezug nehmen.

Will man ihn vermeiden, so muss man aus den Rechnungen alles Thermometermaass entfernen, es wäre denn ein Thermometer  $T$ , für welches  $\gamma_T$  constant ist, was  $g_T = u_T$  gibt (§ 5).

Die thermometrischen Methoden sind damit nicht ausgeschlossen, da man nach der Formel:

$$(A) \quad u_K = u_T,$$

die mathematische Temperatur für jede beliebige Substanz  $K$  hat, sobald das Thermometer  $T$  und seine spezifische Wärme  $\gamma_T$  so genau bekannt ist, dass man zu jeder Ablesung  $g_T$  sofort  $u_T$  berechnen kann.

Dies alles gilt unter Voraussetzung der Fourier-Poisson'schen Wärmeleitungstheorie, und unter dieser Voraussetzung gibt demnach sogar die experimentelle Bestimmung von  $u_K$  keine Veranlassung, um auf die spezifische Wärme von  $K$  einzugehen, sodass für diese letztere in der erwähnten Theorie sich überall keine Stelle findet.

§ 9. Aber hier ist noch eine Schwierigkeit übrig, welche sich an die Formel (B) knüpft und auf einen directen Widerspruch zwischen der Fourier-Poisson'schen Theorie und den zuverlässigsten Ergebnissen der Thermometrie hinzuweisen scheint.

Seien  $K$  und  $K'$  zwei beliebige Körper und  $U$ ,  $U'$  ihre mathematischen,  $G$  und  $G'$  ihre thermometrischen Eigentemperaturen, also etwa des Beispiels wegen:

$$U = G + \varepsilon G(G - 1), \quad U' = G' + \varepsilon' G'(G' - 1).$$

Werden die Körper, ohne dass ihnen immer von neuem Wärme zugeführt wird, längere Zeit in Berührung gebracht, so folgt mit Zugrundelegung der bekannten Grenzbedingung Poisson's (Uebergangswiderstand), dass an der Berührungsstelle die Differenz  $U - U'$  äusserst klein, wenn auch nicht gleich Null wird. Fourier setzt geradezu  $U - U' = 0$ . Die thermometrischen Eigentemperaturen  $G$  und  $G'$  werden also nicht einander gleich, gerade weil nach Fourier genau, fast genau nach Poisson,  $U = U'$  wird.

Dies scheint nun allen bekannten Thatsachen zu widersprechen, da ein Thermometer  $T$  zu beiden Seiten der Berührungsstelle die gleiche Temperatur zeigt.

Dieser Widerspruch ist nur ein scheinbarer.

Seien  $u$  und  $u'$  die mathematischen Temperaturen, welche  $T$  beim Anlegen an  $K$  und  $K'$  erlangt;  $g$  und  $g'$  seien die Grade, die es anzeigt. Die Theorie fordert in einem Falle  $u = U$ , im anderen  $u' = U'$ , aber ausserdem  $U' = U$ , was zusammen:

$$u' = u$$

gibt. Daraus aber folgt auch:

$$g' = g,$$

d. h. auch die Theorie fordert, dass  $T$  an beiden Körpern gleich viel Grade  $g$  zeigt; aber dies ist weder die thermo-



metrische Eigentemperatur  $G$  des einen, noch die thermometrische Eigentemperatur  $G'$  des anderen Körpers.

Will man die letzteren auch noch ermitteln, so müssen  $U$  und  $U'$  und  $u$  als Functionen von  $G$ , resp.  $G'$  und  $g$  bekannt sein: die Wärmeleitungstheorie gibt zu dieser Aufgabe gar keine Veranlassung.

### Zweiter Abschnitt.

Ueber die Dehnung der Körper durch die Wärme und das Leitungsvermögen.

§ 1. Es liege ein wärmeleitender Körper vor, in welchem überall die Temperatur  $u = 0$  herrsche. Bei dieser Temperatur seien  $x, y, z$  die Coordinaten eines unbestimmten Massentheilchens  $m$ ,  $v_0$  ein Volumen innerhalb des Körpers,  $\sigma_0$  seine Oberfläche,  $\rho_0$  die Dichtigkeit (das Gewicht eines Volumentheilchens in Kilogrammen ausgedrückt). Wird der Körper erwärmt, so ändert infolge der Dehnung  $m$  seine Lage,  $v_0$  und  $\sigma_0$  ihre Gestalt; seien  $\xi, \eta, \zeta$  die neuen Coordinaten des nämlichen Theilchens  $m$ ,  $v$  und  $\sigma$  das Volumen und die Oberfläche, welche die nämlichen Theilchen des Körpers enthalten wie  $v_0$  und  $\sigma_0$  bei der Temperatur  $u = 0$ ; die Dichtigkeit bei der Temperatur  $u$  heisse  $\rho$ .

Es handelt sich zunächst um den Wärmehalt  $w$  von  $v$ .

Die Grösse, welche als Temperaturconstante bezeichnet wurde, gibt die Anzahl von Wärmeeinheiten an, welche ein Kilogramm der vorliegenden Substanz von  $0^\circ$  auf  $100^\circ$  C. bringen: sie hat mit der Frage nach der Dehnung nichts zu thun.

Demnach ist der Wärmehalt des Elements  $\partial v$  von  $v$  folgender:

$$cu\rho\partial v.$$

Der Wärmehalt von  $v$  selbst ist das Integral:

$$w = c \int u \cdot \rho \cdot \partial v.$$

Wenn daher  $\partial v_0$  bei der Temperatur  $u = 0$  die nämlichen Körpertheilchen enthält, wie  $\partial v$  bei der Temperatur  $u$ , so ist  $\rho \cdot \partial v = \rho_0 \cdot \partial v_0$ , und es folgt, wenn man  $u$  auf die Körpertheilchen selbst bezieht, unabhängig davon, welche Lage sie im Raum einnehmen:

$$w = c \int u \cdot \rho_0 \cdot \partial v_0.$$



In den nächsten  $\delta t$  Secunden nimmt also der Wärmeinhalt von  $v$  zu um:

$$(A) \quad \delta w = c \delta t \int \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \rho_0 \cdot \partial v_0.$$

§ 2. Es handelt sich nun darum, diese Reduction vom Volumen  $v$  auf das ursprüngliche Volumen  $v_0$  auch für den Ausdruck von  $\delta w$  herzuleiten, den die Wärmeleitung ergibt, und dies wird die aufzustellenden Hypothesen liefern.

Ist bei der Temperatur  $u$ , also im gedehnten Volumen  $v$ ,  $\omega$  ein Flächenelement,  $N$  seine Normale,  $K$  das Leitungsvermögen, so gehen durch  $\omega$  in  $\delta t$  Secunden gegen die Richtung von  $N$ :

$$K \frac{\partial u}{\partial N} \omega \delta t$$

Wärmeeinheiten (Hypothese Fourier's). Nehmen wir für  $\omega$  die Elemente  $\partial \sigma$  der Oberfläche  $\sigma$  von  $v$  und für  $N$  jedesmal die aus  $v$  heraustretende Normale, so folgt:

$$(B) \quad \delta w = \delta t \cdot \int K \frac{\partial u}{\partial N} \cdot \partial \sigma.$$

Dies ist also der Ausdruck, in welchem die Integration über  $\sigma$  auf eine Integration über die Elemente von  $\sigma_0$  reducirt werden soll.

Nun führe ich eine erste Beschränkung meiner Untersuchung ein, nämlich die folgende:

I. Dass die Dehnung des Körpers infolge seiner Erwärmung, sei es infolge ihrer Kleinheit, sei es infolge der Constitution der leitenden Substanz, die kleinsten Abtheilungen des Körpers nur so deformirt, dass sie nicht aufhören, ihrer früheren Gestalt ähnlich zu bleiben.

Krystallinische Substanzen sind demnach unbedingt ausgeschlossen, und führe ich diese Discussion mit der vorstehenden Einschränkung um so lieber aus, als vielleicht gerade dadurch hervortritt, welches die wahren Grundlagen einer Theorie der Wärmeleitung in Krystallen sind.

Ist unter der vorstehenden Voraussetzung  $\epsilon$  der lineare Ausdehnungscoefficient, so wird  $\partial \sigma = (1 + \epsilon)^2 \cdot \partial \sigma_0$ , wobei  $\partial \sigma_0$  dasjenige Element der ursprünglichen Oberfläche  $\sigma_0$  bedeutet, aus welchem  $\partial \sigma$  durch Dehnung hervorgegangen ist. —

Wegen I. aber bildeten diejenigen Massentheilchen  $m$ , welche auf der Normale  $N$  von  $\partial\sigma$  gelagert sind, ursprünglich die Normale  $N_0$  von  $\partial\sigma_0$ , und wenn  $\partial N_0$  dasjenige Element der letzteren ist, aus welchem  $\partial N$  durch Dehnung hervorgegangen ist, so ist  $\partial N = (1 + \epsilon) \partial N_0$ .

In  $\partial u / \partial N$  bedeutet  $\partial u$  die Temperaturdifferenz zwischen denjenigen beiden Körpertheilchen, welche Anfang und Ende von  $\partial N$  bilden: Da wir  $u$  unter allen Umständen zunächst auf das Körpertheilchen  $m$  selbst, dann erst auf Coordinaten beziehen, so ist es gleichgültig, ob wir  $u$  bezeichnen als die Temperatur, gehörig zu den Coordinaten  $\xi, \eta, \zeta$  im gedehnten, oder als die Temperatur, gehörend zu den Coordinaten  $x, y, z$  im ungedehnten Volumen.

In diesem Sinne ist  $\partial u$  nichts als die Temperaturdifferenz vom Anfang bis zum Ende von  $\partial N_0$ , und so folgt:

$$\frac{\partial u}{\partial N} = \frac{1}{1 + \epsilon} \cdot \frac{\partial u}{\partial N_0}.$$

Jetzt erhalten wir aus (B):

$$\delta w = \delta t \int K(1 + \epsilon) \frac{\partial u}{\partial N_0} \cdot \partial \sigma_0.$$

§ 3. Diese Formel gibt uns die zweite Hypothese, welche erforderlich ist, um zu den Formeln Fourier's zu kommen, nämlich die folgende:

II. Dass  $K(1 + \epsilon) = k$  von der Dehnung unabhängig ist. Wird diese Hypothese, die sofort discutirt werden soll, ebenfalls angenommen, so folgt:

$$\delta w = k \delta t \cdot \int \frac{\partial u}{\partial N_0} \cdot \partial \sigma_0,$$

oder nach bekannten Sätzen:

$$\delta w = k \delta t \int \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \partial v_0.$$

Hieraus erhalten wir durch Gleichsetzung mit dem Ausdrucke:

$$(A) \quad \delta w = c \delta t \int \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \rho_0 \cdot \partial v_0,$$

$$\int \left[ c \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} - k \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \right] \partial v_0 = 0,$$

also die Fourier'sche Differentialgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{\varrho_0 c} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

mit dem Zusatz:

III. Dass  $xyz$  zwar die Coordinaten desjenigen Theilchens bedeuten, dessen Temperatur durch  $u$  bezeichnet ist; aber es sind nicht die Coordinaten im gedehnten Zustande der Substanz, sondern reducirt auf die Temperatur  $u = 0$ .

§ 4. Für den Nachweis der Bedeutung, welchen die Hypothese II hat, ist die Formel:

$$K(1 + \varepsilon) = k,$$

allein nicht ausreichend, sondern man muss auch ihren Einfluss auf den Wärmestrom ermitteln. Bei dem Temperaturgefälle:

$$\frac{\partial u}{\partial N} = u'$$

ist für das oben eingeführte Element  $\omega$  der Wärmestrom:

$$S = Ku' \omega.$$

Ist  $\omega_0$  das Element, aus welchem  $\omega$  durch Dehnung hervorgegangen ist, so ist  $\omega = (1 + \varepsilon)^2 \omega_0$ , und da  $K(1 + \varepsilon) = k$  sein soll, so folgt:

$$K\omega = (1 + \varepsilon)k\omega_0 \quad \text{also} \quad S = (1 + \varepsilon)ku' \omega_0.$$

Während also die Formel  $K = k/(1 + \varepsilon)$  aussagt, dass nach der Hypothese II das Leitungsvermögen durch Dehnung abnimmt, zeigt der Ausdruck für  $S$ , dass bei gleichem Temperaturgefälle  $u'$  der Wärmestrom zwischen gleichen Körpertheilchen, nämlich den durch  $\omega$ , also auch durch  $\omega_0$  geschiedenen, mit der Dehnung zunimmt, und zwar jenes wie dieser im Verhältniss von 1 zu  $1 + \varepsilon$ , wenn  $\varepsilon$  die Lineardilatation ist.

So also können wir sagen:

Wendet man die Maassbestimmungen Fourier's nur auf solche Fälle an, in welchen — gleichviel aus welchen Gründen — die Dehnungen der wärmeleitenden Substanz zwar das Volumen, aber nicht die Gestalt der kleinsten Körpertheilchen ändern, und setzt man dann zu den Annahmen Fouriers über das Maass des Wärmestroms noch die folgende:

Dass bei gleichem Temperaturgefälle der Wärmestrom

zwischen den gleichen Körpertheilchen im Verhältniss von  $1:(1+\epsilon)$  wächst, wenn eine Linearausdehnung im gleichen Verhältniss erfolgt, so gilt die von Fourier gegebene Differentialgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{\rho c} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right),$$

wenn man unter  $x, y, z$  die Coordinaten versteht, welche das Körpertheilchen vor jeder Dehnung bei der allgemeinen Temperatur  $u = 0$  hatte.

### Dritter Abschnitt.

Die Bedingungen für stetig fortschreitende Unstetigkeiten bei der Wärmeleitung. (Aenderung des Aggregatzustandes).

§ 1. Im Folgenden soll an einigen und zwar den einfachsten Beispielen gezeigt werden, dass die Fourier-Poisson'sche Theorie ausreicht, auch diejenigen Wärmeprobleme zu behandeln, bei welchen die Temperaturerhöhungen längs einer gewissen Fläche Aenderungen des Aggregatzustandes hervorrufen, sodass auf der einen Seite dieser Fläche die leitende Substanz sich z. B. im festen, auf der anderen Seite im flüssigen Zustande befindet. Wir werden uns auf den einfachsten Fall beschränken, dass die Temperaturvertheilung nur von einer Coordinate abhängt, dass also die Fläche, längs welcher die Aenderung des Aggregatzustandes stattfindet, und die wir Uebergangsfläche nennen wollen, eine Ebene ist. Da sich bei den zu behandelnden Problemen ein Theil der leitenden Substanz stets im flüssigen Zustande befindet, so ist, wenn Strömungen principiell vermieden werden sollen, diese Beschränkung nothwendig. Da es sich ferner hier nur darum handelt, den bei Wärmeproblemen dieser Art einzuschlagenden Weg zu weisen, so setzen wir als wärmeleitende Substanz Wasser und Eis voraus, indem hierbei bei der von Fourier gewählten Wärmeeinheit die für die Uebergangsebene sich ergebende Grenzbedingung eine möglichst einfache wird.

Um zu dieser Grenzbedingung zu gelangen, denken wir uns Wasser und Eis, beide unendlich ausgedehnt, in einer zur Coordinatenrichtung senkrechten Ebene  $Q_0$  zusammen-

stossen und betrachten ein zu  $Q_0$  senkrechtes Prisma, welches demnach aus einer Wasser- und einer Eissäule zusammengesetzt ist. Ist dann  $\omega_1$  die Geschwindigkeit, mit welcher die Wassersäule wächst,  $\omega_2$  diejenige, mit welcher die Eissäule abschmilzt, so verlängert sich die Wassersäule in  $\Delta t$  Sekunden um  $\omega_1 \cdot \Delta t$  Meter; die Eissäule wird zugleich um  $\omega_2 \Delta t$  Meter kürzer. Wiegt bei der Temperatur Null ein Kubikmeter Wasser  $\rho_1$ , ein Kubikmeter Eis  $\rho_2$  Kilogramm, und ist  $Q$  der Querschnitt beider Säulen, so ist  $\rho_2 \cdot \omega_2 \cdot Q \cdot \Delta t$  die Masse Eis, welche in  $\Delta t$  Sekunden schmilzt,  $\rho_1 \cdot \omega_1 \cdot Q \cdot \Delta t$  die Masse des hierbei gebildeten Wassers, also:

$$(I) \quad \rho_1 \omega_1 = \rho_2 \omega_2.$$

Sind  $\omega_1$  und  $\omega_2$  negativ, findet also nicht ein Abschmelzen des Eises, sondern ein Anfrieren des Wassers statt, so ist  $-\rho_1 \omega_1 Q \Delta t = -\rho_2 \omega_2 Q \Delta t$  die Masse, die ihren Aggregatzustand ändert.

Seien  $\omega_1$  und  $\omega_2$  wieder positiv, und an der Uebergangsfläche Eis und Wasser auf den Schmelztemperaturen:

$$(II) \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 0,$$

so ist der Wärmehalt einer unendlich dünnen Doppelschicht, in deren Inneren sich die Uebergangsebene befindet, gleich Null und bleibt gleich Null. Die ganze Wärmemenge, welche während  $\Delta t$  Sekunden in diese Schicht hineinströmt, wird also verbraucht, um  $\rho_2 \omega_2 Q \Delta t$  kg Eis von  $0^\circ$  in  $\rho_1 \omega_1 Q \Delta t$  kg Wasser von  $0^\circ$  zu verwandeln, wozu nach dem Wärmemaass Fourier's  $\rho_2 \omega_2 Q \Delta t$  Wärmeeinheiten erforderlich sind.

Sind  $S_1 Q \Delta t$  und  $S_2 Q \Delta t$  die Wärmeströme und nach der Uebergangsstelle gerichtet, so ist diese Anzahl von Wärmeeinheiten  $= (S_1 + S_2) Q \Delta t$ ; mithin folgt:

$$(III) \quad S_1 + S_2 = \rho_1 \omega_1 = \rho_2 \omega_2.$$

Sind  $\omega_1$  und  $\omega_2$  beide negativ, so bleibt auch diese Formel richtig.

§ 2. Wir führen jetzt ein veränderliches Coordinatensystem ein, indem wir den Nullpunkt der zu  $Q_0$  senkrechten  $X$ -Axe stets in die Uebergangsebene fallen lassen, sodass die Grenze zwischen Wasser und Eis immer bei  $x = 0$  bleibt. Wir zählen ferner in beiden Massen Abscissen, die nach dem Unendlichen hin wachsen.

a) Ist  $Q_0$  die Uebergangsstelle und  $Q_1$  ein Querschnitt der Wassersäule, dadurch charakterisirt, dass er stets durch die nämlichen Theilchen gebildet wird, also mit der Zeit  $t$  seine Lage (in Bezug auf die Uebergangsebene) ändert, so zählen wir von  $Q_0$  bis  $Q_1$  Abscissen  $x_1$ , die also mit der Geschwindigkeit  $\omega_1$  wachsen und von einem mit  $Q_1$  zugleich fortschreitenden Querschnitte  $Q_1^0$  an, der für  $t = 0$  die Uebergangsebene war, bis  $Q_1$  Abscissen  $\xi_1$ . Dann ist:

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = \omega_1, \quad x_1 = \xi_1 + \int_0^t \omega_1 \partial t,$$

da  $x_1 = \xi_1$  ist für  $t = 0$ .

b) Wird ebenso im Eise von  $Q_0$  bis zu einem Querschnitte  $Q_2$ , der stets durch die nämlichen Theilchen gebildet wird, die mit der Geschwindigkeit  $\omega_2$  abnehmende Abscisse  $x_2$  gezählt, und ist für  $t = 0$ ,  $x_2 = \xi_2$ , so ist:

$$\frac{\partial x_2}{\partial t} = -\omega_2, \quad x_2 = \xi_2 - \int_0^t \omega_2 \partial t.$$

Beide Formeln a) und b) gelten auch, wenn  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  negativ sind, nur dass dann die Geschwindigkeit, mit der  $x_1$  zu- und diejenige, mit der  $x_2$  abnimmt, eine negative ist.

Mit Hülfe der so eingeführten Coordinatensysteme sind die in (III) benutzten Wärmeströme.

$$(IV) \quad S_1 = k_1 \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1}, \quad S_2 = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2}.$$

Ausserdem gelten die Differentialgleichungen:

$$(V_a) \quad \rho_1 c_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} = k_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_1^2}, \quad \rho_2 c_2 \frac{\partial u_2}{\partial t} = k_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_2^2},$$

wenn Eis und Wasser zusammen einen nach allen Richtungen unendlich ausgedehnten Körper bilden. Liegt dagegen nur ein nach beiden Seiten unendlich langes Prisma mit dem Querschnitte  $Q$  vor, und ist  $S$  der Umfang von  $Q$ ,  $U$  die Temperatur der Umgebung, so lauten die Differentialgleichungen:

$$(V_b) \quad \begin{cases} \rho_1 c_1 Q \frac{\partial u_1}{\partial t} = k_1 Q \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_1^2} - q_1 S(u_1 - U), \\ \rho_2 c_2 Q \frac{\partial u_2}{\partial t} = k_2 Q \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_2^2} - q_2 S(u_2 - U). \end{cases}$$

Hierin sollen nun  $u_1, u_2$  statt durch  $\xi_1$ , resp.  $\xi_2$  und  $t$  durch  $x_1$ , resp.  $x_2$  und  $t$  ausgedrückt werden. Sei:

$$u_1 = u_1(x_1, t), \quad u_2 = u_2(x_2, t);$$

dann enthalten die Ausdrücke dieser Art die Variable  $t$  explicite und implicite, und es lauten die in (IV) und (V) erforderlichen Werthe:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial t} + \omega_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial t} - \omega_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{aligned}$$

Zugleich aber ist:

$$\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}.$$

Demnach erhalten wir folgende Bedingungsgleichungen:

$$(A) \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial t} &= \omega_1, & \frac{\partial x_2}{\partial t} &= -\omega_2; & x_1 &= \xi_1 \\ & & & & x_2 &= \xi_2 \end{aligned} \right\} \text{ für } t = 0,$$

$$(B) \quad \left. \begin{aligned} u_1 &= 0, & u_2 &= 0, \\ k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= \rho_1 \omega_1 = \rho_2 \omega_2 \end{aligned} \right\} \text{ für } \begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0, \end{aligned}$$

(C) a) für den unendlichen Raum:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \omega_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= \frac{k_1}{\rho_1 c_1} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} - \omega_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= \frac{k_2}{\rho_2 c_2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \end{aligned} \right\} \text{ für } \begin{aligned} x_1 &> 0 \\ x_2 &> 0, \end{aligned}$$

b) für ein unendlich langes Prisma:

$$\left. \begin{aligned} Q \rho_1 c_1 \left[ \frac{\partial u_1}{\partial t} + \omega_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right] &= k_1 Q \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - q_1 S(u_1 - U) \\ Q \rho_2 c_2 \left[ \frac{\partial u_2}{\partial t} - \omega_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right] &= k_2 Q \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} - q_2 S(u_2 - U) \end{aligned} \right\} \text{ für } \begin{aligned} x_1 &> 0 \\ x_2 &> 0. \end{aligned}$$

worin  $1/q_1$  und  $1/q_2$  den „Uebergangswiderstand“ für den Wärmestrom zwischen Wasser, resp. Eis und der gemeinsamen Umgebung bedeuten.

Hierbei ist noch zu bemerken, dass in allen diesen Gleichungen  $x_1$  und  $x_2$  Coordinaten eines Systems sind, das im Laufe der Zeit seinen Anfangspunkt beständig im Raume verschiebt. Man kann auch — und dies wird zur Vereinfachung der Anschauung beitragen — umgekehrt  $x_1$  und  $x_2$  als Coordinaten eines im Raum festliegenden Systems be-



trachten, wenn man die ganze leitende Masse sich so bewegt denkt, dass die Uebergangsebene stets denselben Ort im Raume einnimmt.

§ 3. Der stationäre Zustand. Im vorliegenden Falle ist ein Beharrungszustand auf zweierlei Art denkbar. Drückt man etwa  $u_1$  aus durch  $\xi_1$  und  $t$ , und wird dann  $u_1$  unabhängig von  $t$ , so heisst dies, dass ein jedes Massentheilchen seine Temperatur  $u_1$  unverändert beibehält, während es — wegen der Vorgänge an der Uebergangsebene — seinen Ort im Raume (seine Entfernung von der Uebergangsstelle) — ändert. Verhält es sich ebenso mit  $u_2$ , so wird der Zustand ein stationärer sein für einen Beobachter, der an der Bewegung einer der beiden Massen theilnimmt, aber nicht für denjenigen, der ausserhalb steht. Dieser stationäre Zustand ist von keinem Interesse; denn da die einzelnen, sowohl Wasser- wie Eistheilchen, an der Uebergangsstelle die Temperatur  $u = 0$  haben, weil ferner die Uebergangsebene im Laufe der Zeit über jedes Theilchen entweder schon hinweggeschritten ist oder noch darüber hinwegschreiten wird, so herrscht überall und zu jeder Zeit im Wasser und im Eise die Temperatur Null.

Für einen ausserhalb stehenden Beobachter wird die Temperaturvertheilung in dem Falle eine stationäre sein, wenn  $u_1$  und  $u_2$ , ausgedrückt durch  $x_1$ , resp.  $x_2$  und  $t$  in Functionen von  $x_1$  und  $x_2$  (ohne explicites  $t$ ) übergehen.

Diesen zweiten stationären Zustand wollen wir untersuchen.

I. Eis und Wasser zusammen bilden einen nach allen Richtungen unendlichen Körper.

Der stationäre Zustand fordert zunächst:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0,$$

sodass wir die Gleichungen erhalten:

$$\begin{aligned} \text{(A)} \quad \left. \begin{array}{l} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{array} \right\} & \omega_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{k_1}{\rho_1 c_1} \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = 0; \quad \omega_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{k_2}{\rho_2 c_2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} = 0, \\ \text{(B)} \quad \left. \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array} \right\} & u_1 = 0; \quad u_2 = 0; \quad k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \rho_1 \omega_1 = \rho_2 \omega_2. \end{aligned}$$



Die Gleichungen (A) lehren, dass  $\omega_1$  und  $\omega_2$  von  $t$  unabhängig, also constant sein müssen.

Particularlösungen sind:

$$u_1 = a e^{\alpha x_1}, \quad u_2 = b e^{\beta x_2},$$

wofern  $\alpha$  und  $\beta$  den Gleichungen genügen:

$$\alpha \left( \omega_1 - \frac{k_1}{\varrho_1 c_1} \alpha \right) = 0, \quad \beta \left( \omega_2 + \frac{k_2}{\varrho_2 c_2} \beta \right) = 0,$$

welche für  $\alpha$  und  $\beta$  folgende Werthe liefern:

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = 0, \\ \alpha_2 = \frac{\varrho_1 \omega_1 c_1}{k_1}, \quad \beta_2 = -\frac{\varrho_2 \omega_2 c_2}{k_2}.$$

Mit Hülfe dieser Werthe und mit Berücksichtigung der Bedingung (B), nach welcher, für  $x_1 = 0$  und  $x_2 = 0$ ,  $u_1 = 0$  und  $u_2 = 0$  sein soll, erhält man für  $u_1$  und  $u_2$  die Ausdrücke:

$$u_1 = a \left( e^{\frac{\varrho_1 \omega_1 c_1}{k_1} x_1} - 1 \right), \quad u_2 = b \left( e^{-\frac{\varrho_2 \omega_2 c_2}{k_2} x_2} - 1 \right).$$

Diese Lösungen genügen auch der letzten Grenzbedingung unter (B), wofern zwischen  $a$  und  $b$  die Beziehung herrscht:

$$a c_1 - b c_2 = 1.$$

Die Constante  $b$  bleibt willkürlich wählbar. Ihre Bedeutung ergibt sich, wenn man  $x_2 = \infty$  setzt; man erhält dann  $u_2 = -b$ , sodass  $-b$  die Temperatur des Eises im Unendlichen bedeutet.

II. Eis und Wasser bilden einen nach beiden Seiten unendlich langen prismatischen Raum.

Die Bedingungen lauten:

$$(A) \quad x_1 > 0 \left\{ \begin{aligned} k_1 Q \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \varrho_1 \omega_1 c_1 Q \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - q_1 S(u_1 - U) &= 0, \\ x_2 > 0 \left\{ \begin{aligned} k_2 Q \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \varrho_2 \omega_2 c_2 Q \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - q_2 S(u_2 - U) &= 0, \end{aligned} \right. \end{aligned} \right.$$

$$(B) \quad \begin{aligned} x_1 = 0 \} & u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \varrho_1 \omega_1 = \varrho_2 \omega_2. \\ x_2 = 0 \} \end{aligned}$$

Die Bedingungen (A) lehren: 1) dass  $\omega_1$  und  $\omega_2$  von  $t$  unabhängig sein müssen, 2) dass auch  $U$ , die Temperatur der Umgebung, stationär sein muss, und zwar in demselben Sinne wie  $u_1$  und  $u_2$ . Dies ist sicher der Fall, wenn  $U$  auch noch von  $x$  unabhängig, also eine Constante ist. Nehmen

wir zur weiteren Vereinfachung noch an, dass die constante Temperatur  $U$  der Umgebung den Werth Null hat, dann ergibt sich ganz auf dieselbe Weise, wie eben, folgende Lösung:

$$u_1 = a \left( e^{\frac{\varrho_1 \omega_1 c_1}{2k_1} (\lambda_1 + 1) x_1} - e^{-\frac{\varrho_1 \omega_1 c_1}{2k_1} (\lambda_1 - 1) x_1} \right),$$

$$u_2 = b \left( e^{-\frac{\varrho_2 \omega_2 c_2}{2k_2} (\lambda_2 + 1) x_2} - e^{+\frac{\varrho_2 \omega_2 c_2}{2k_2} (\lambda_2 - 1) x_2} \right),$$

Hierin muss zwischen  $a$  und  $b$  die Beziehung herrschen:

$$a c_1 \lambda_1 - b c_2 \lambda_2 = 1,$$

und es bedeutet:

$$\lambda_1 = + \sqrt{1 + \frac{4k_1 q_1}{(\varrho_1 \omega_1 c_1)^2} \cdot \frac{S}{Q}}, \quad \lambda_2 = + \sqrt{1 + \frac{4k_2 q_2}{(\varrho_2 \omega_2 c_2)^2} \cdot \frac{S}{Q}}.$$

Ich habe auch noch den Fall behandelt, in welchem die Temperatur  $U$  der Umgebung stationär, also eine Function von  $x$  ist. Dabei ergeben sich aber so complicirte, unübersichtliche Formeln, dass es sich nicht der Mühe lohnt, sie hier mitzutheilen.

Buchsweiler im Elsass, den 3. November 1881.

### III. Ueber die Beziehung des Gefrierpunktes von Salzlösungen zu deren Spannkraftsgesetze; von Franz Koláček.

Den Ausgangspunkt der folgenden Betrachtungen bildet die Thatsache, dass aus einer Salzlösung blos reines Wasser ausfriert. Die stabile Coëxistenz von festem Eis und der Salzlösung bei der Erstarrungstemperatur führt zu dem Schlusse, dass der Gefrierpunkt einer Salzlösung derjenige Punkt ist, wo Eis und Lösung dieselbe Dampfspannkraft besitzen. Die Aufgabe lässt sich dann graphisch lösen. Man construirt nach den Zahlen von Regnault über der Abscissenaxe der Temperaturen die Dampfdruckcurve des Eises, sodass die Ordinaten den Spannkraften, und der Coordinatenursprung dem Eirpunkte entspricht. Die Spannkraftcurve des reinen Wassers trifft die Eiscurve auf der

$y$ -Axe bei dem Werthe  $p_0 = 4,6$  mm, und zwar in einem Winkel, wie zuerst Kirchhoff<sup>1)</sup> gezeigt hat. Ferner denke man sich die Spannkraftcurve der betreffenden Salzlösung construirt. Diese wird nach allen bisherigen Erfahrungen unterhalb der Dampfcurve des reinen Wassers verlaufen und die Eisdampfcurve in dem Gefrierpunkte der Salzlösung offenbar **unter** Null Celsius treffen.

Die einzige leicht zu behebende Schwierigkeit besteht darin, aus den bis jetzt vorliegenden Daten über die Spannkraft der Salzlösungen, die insgesamt bei höheren Temperaturen gewonnen und dabei zur Spannkraft des reinen Wassers in Beziehung gesetzt worden sind, die Spannkraft unter Null zu eruiiren. In der That ist die von Wüllner aufgestellte Relation  $p - p_0 = p_0 \cdot (s/w) (\alpha + \beta p_0)$  unter dem Eispunkte nicht mehr gültig, da hier der Begriff  $p_0$  „Dampfdruck des reinen Wassers“ seinen Sinn verliert. Ein einfacher Process ermöglicht, den Dampfdruck der Lösung unterhalb Null zu eruiiren, falls derselbe für Temperaturen über Null bekannt ist.

Man entziehe einer Lösung von  $w$  g Wasser und  $s$  g Salz beim Nullpunkte (absol. Temp. =  $T_1$ ) die Wassermenge  $dw$  durch Abdampfen. Ist  $\lambda_1$  die entsprechende Verdampfungswärme, so ist  $\lambda_1 dw$  der entsprechende Wärmearaufwand. Dieser Dampfmenge führe man bei constanter Temperatur so viel Wärme zu, dass sie die Dichtigkeit des reinen Wasser derselben Temperatur entsprechenden Dampfes erreicht, worauf der Dampf zu Wasser derselben Temperatur niedergeschlagen wird. Bei der ausserordentlichen Dünne des Dampfes verhält sich derselbe als Gas, behält somit von der Wärme, die ihm bei der Volumenänderung zugeführt wurde, nichts in Form von innerer Energie zurück. Beim Niederschlagen gewinnt man die Wärmemenge  $\lambda_0 dw$ , wobei  $\lambda_0$  die Verdampfungswärme des reinen Wassers bei  $T_1$  vorstellt. Zieht man die Bilanz über Wärmegewinn und Ausgabe, so wird man  $dw(\lambda_0 - \lambda)$  als Wärmegewinn bezeichnen können, der erzielt wird, wenn aus der Lösung  $dw$  g Wasser verdampfen,

1) Kirchhoff, Pogg. Ann. 103. p. 177. 1858.

und der Dampf zu reinem Wasser derselben Temperatur condensirt wird. Die Dilatationswärme zeigt sich in Form äusserer Arbeit aufgespeichert, kommt somit nicht in Betracht. Man kann andererseits die Lösung bis zur Temperatur  $T$  abkühlen,  $dw$  Wasser mit dem Aufwande  $\lambda dw$  in Dampf verwandeln, den Dampf bei constanter Temperatur auf das Volumen des der Temperatur  $T_1$  entsprechenden Dampfes von reinem Wasser bringen, man kann ihn ferner bei constantem Volumen bis auf  $T_1$  erwärmen, ihn zu Wasser von der Temperatur  $T_1$  condensiren; endlich kann man den Rest der Lösung bis auf  $T_1$  erwärmen. Ist  $c$  die specifische Wärme der Lösung,  $C$  jene des gasförmigen Dampfes bei constantem Volumen, so ist der erzielte Wärmegewinn:

$$\frac{d}{dw} [c(s + w)] (T_1 - T) dw - dw C(T_1 - T) + (\lambda_0 - \lambda) dw.$$

Aus der Aequivalenz beider Wärmegewinne folgt:

$$\lambda = \lambda_1 + (T_1 - T) \left[ \frac{\partial}{\partial w} (cs + cw) - C \right].$$

Ist  $v$  das specifische Volumen des Dampfes bei der Temperatur  $T$ ,  $A$  das Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit, so wird  $\lambda = ATv (\partial p / \partial t)$ , welcher Werth mit Rücksicht auf die bei dünnem Dampfe gültige Relation  $pv = RT$  sich so umändern lässt, dass folgt:

$$RA T^2 \frac{d}{dT} (\log p) = \lambda_1 + (T_1 - T) \left[ \frac{d}{dw} (cs + cw) - C \right].$$

Setzt man:

$$\frac{d}{dw} [cs + cw] = n + C, \quad \lambda_1 + T_1 \left[ \frac{\partial}{\partial w} (cs + cw) - C \right] = m,$$

so hat man:

$$RA \frac{\partial}{\partial T} \log p = \frac{m}{T^2} - \frac{n}{T}.$$

Nimmt man auf die geringe Veränderlichkeit der specifischen Wärme der Lösung mit der Temperatur nicht Rücksicht, so sind  $m$  und  $n$  von  $T$  unabhängig. Das Integral dieser Gleichung ist, wenn man die Integrationsconstante so bestimmt, dass für  $T = T_1$   $p = p_1$  wird:

$$RA \log \frac{p}{p_1} = -m \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_1} \right) - n \log \frac{T}{T_1}.$$

Die Grösse  $p_1$  ist der Dampfdruck der Lösung bei dem Nullpunkte der hunderttheiligen Scala. Die letzte Relation gestattet, die Dampfdruckcurve der Lösung für jede beliebige Temperatur  $T$  unter Null zu construiren. Wäre nun der Eisdampfdruck als Function von  $T$  bekannt, wäre also  $\log p_{\text{eis}} = f(T)$ , so liesse sich aus:

$$RAf(T) = RA \log p_1 - m \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_1} \right) - n \log \frac{T}{T_1}$$

die Gefriertemperatur  $T$  berechnen. Oder umgekehrt liesse sich zu einer gegebenen Gefriertemperatur, bei der der Eisdampfdruck bestimmt ist, die Concentration finden. Leicht gelingt es, die Rechnung für Lösungen mit sehr wenig Salzgehalt auszuführen. Dann ist  $T$  von  $T_1$  sehr wenig verschieden. Statt  $(1/T) - (1/T_1)$  kann man setzen  $\vartheta/T_1^2$ , statt  $\log(T/T_1) = -\vartheta/T_1$ , wobei  $\vartheta$  die Gefrierpunkterniedrigung bedeutet.

Für geringe Concentrationen ist  $c = 1 - \nu(s/w)$ , deshalb bei Nichtrücknahme auf Grössen der Ordnung  $s^2/w^2$ ,  $n = 1 - C$ ,  $m = \lambda_1 + n$ .

Die Eisdrukcurve ist dann in der nächsten Nähe des Eispunktes linear, sodass  $f(T) = f(T_1) + (T_1 - T)k$  wird, wo  $f(T_1) = p_0$  der Druck von Eis- und Wasserdampf bei  $0^\circ \text{C}$ . ist, und  $k$  die trigonometrische Tangente der Eisdampfdruckcurve ebendasselbst vorstellt. Man hat somit:

$$AR \log(p_0 - k\vartheta) = RA \log p_1 - v_1 \frac{\partial p_1}{\partial t} A T_1 \frac{\vartheta}{T_1^2},$$

weil  $\lambda_1 = A v_1 (\partial p_1 / \partial t) \cdot T_1$  ist. Nach Wüllner's Gesetz ist  $p_1 = p_0 [1 - \alpha(s/w)]$ . Somit, da auch  $v_1 p_1 = R T_1$  ist:

$$AR \log(p_0 - k\vartheta) = RA \log p_1 - RA \vartheta \frac{d}{dt} \log p_1, \quad \text{oder:}$$

$$\log \left( 1 - \frac{k\vartheta}{p_0} \right) = \log \left( 1 - \alpha \frac{s}{w} \right) - \vartheta \frac{\partial}{\partial t} \left[ \log p_0 + \log \left( 1 - \alpha \frac{s}{w} \right) \right].$$

Entwickelt man die Logarithmen bis zum ersten Gliede so folgt:

$$\alpha \frac{s}{w} = \vartheta \left\{ \frac{k}{p_0} - \frac{\partial p_0}{\partial t} \frac{1}{p_0} + \frac{s}{w} \cdot \frac{d\alpha}{dt} \right\}.$$

Da  $s/w$  sehr klein vorausgesetzt wurde,  $da/dt$  nach Wüllner's Messungen sehr klein ist, da ferner Kirchhoff gefunden hat, dass  $k - dp_0/\partial t = \text{Eisschmelzwärme} / A v_0 = 0,044 \text{ mm}$ , so wird schliesslich:

$$\vartheta = \alpha \cdot \frac{s}{w} \cdot \frac{p_0 \text{ mm}}{0,44 \text{ mm}} \quad 1)$$

Die Temperaturerniedrigung einer einprocentigen Lösung ist, weil  $s/w = 1/100$  und  $p_0 = 4,600 \text{ mm}$  ist:

$$\vartheta = \alpha \cdot 1,045.$$

In der ersten der zwei letzten Gleichungen ist das Rüdorff'sche Gesetz ausgesprochen; folgende kleine Tabelle enthält  $\alpha$  berechnet nach Wüllner's Versuchen für den Eispunkt, das damit berechnete  $\vartheta$  und den von Rüdorff gefundenen Werth desselben.

Salze	$\alpha$ nach Wüllner <sup>2)</sup>	$\vartheta$ berechnet	$\vartheta$ nach Rüdorff <sup>3)</sup>
Salpetersaures Kali	0,1965	0,2052	0,267
Salpetersaures Natron	0,3154	0,3296	0,370
Chlorkalium . . . . .	0,3902	0,4078	0,443
Chlornatrium . . . . .	0,6000	0,6270	0,600

Aus der angeführten Tabelle ist ersichtlich, dass die berechneten Werthe der  $\vartheta$  mit den experimentell von Rüdorff gefundenen einen gleichen Gang befolgen. Eine genauere Uebereinstimmung kann man aus mehreren Gründen nicht erwarten.

Erstens wurde die Wüllner'sche Relation, die nur bei höheren Temperaturen mit den beobachteten Werthen übereinstimmende Resultate gibt, auch für niedrigere Temperaturen verwendet. Zweitens beziehen sich die Rüdorff'schen Zahlen nicht auf sehr kleine, sondern endliche Concentrationen; daraus ergibt sich unmittelbar, dass die berechneten Werthe im allgemeinen zu klein ausfallen müssen, selbst dann, wenn die

1) Zu derselben Formel gelangt man auch in elementarer Weise, wenn man das Dreieck betrachtet, welches den Gefrierpunkt des reinen Wassers, jenen der (sehr verdünnten) Lösung, so wie den Schnittpunkt der Dampfcurve der Salzlösung mit der  $y$ -Axe zu Eckpunkten hat.

2) Mousson, Phys. 2. p. 119.

3) Mousson, Phys. 2. p. 99.

Wüllner'sche Relation eine genaue wäre. Denn in der angenäherten Rechnung der  $\vartheta$  wurde angenommen, dass die Eisdampfdruckcurve linear, also zu steil verläuft. Infolge dessen werden die Dampfcurven der Salzlösungen dieselbe weiter vom Nullpunkte treffen, als es die Rechnung ergibt. Drittens stimmen die von verschiedenen Forschern sowohl für  $\alpha$  als auch für  $\vartheta$  gegebenen Werthe nicht sonderlich überein. Dies tritt beispielsweise bei dem schwefelsauren Kali ein, wo  $\alpha$  nach Pauchon<sup>1)</sup> 0,128, nach Wüllner 0,3821 ist. Dementsprechend wäre der berechnete Werth der  $\vartheta = 0,1337$ , bez. 0,3993, während die directe Messung von de Coppet<sup>2)</sup> 0,201 ... 0,224 ergab.

Beim Nachsehen der Referate über diesbezügliche Arbeiten fand ich, dass schon Raoult<sup>3)</sup> auf empirischem Wege gesetzmässige Beziehungen zwischen der Erniedrigung des Gefrierpunktes und der Erhöhung der Siedetemperatur gefunden hat. Raoult findet, dass der Ueberschuss  $\Delta$  der Dampfspannung des reinen Wassers über jene der Lösung bei 100° und 1% Salzgehalt dividirt durch die Zahl 7,6 die Gefrierpunktserniedrigung ergibt. Nach unserer Theorie ist  $\Delta = 760 \text{ mm} \cdot \frac{1}{100} \cdot \alpha$ , somit  $\Delta / 7,6 = \alpha$ . Andererseits ist  $\vartheta = 1,045 \alpha$ . Durch Elimination von  $\alpha$  folgt  $\Delta / 7,6 = \vartheta / 1,045$ , was mit den Versuchsergebnissen von Raoult nahe übereinstimmt.

Ich will zum Schluss noch folgende Bemerkungen anfügen.

Lässt man aus der Salzlösung alles Wasser verdampfen, und zwar bei constanter Temperatur, und schlägt man den Dampf zu Wasser derselben Temperatur nieder, so ist der Warmegewinn gleich dem Wärmeverbrauche bei Lösung von  $s$  g Salz in  $w$  g Wasser. Nach den entwickelten Formeln ist dieser Wärmeverbrauch gegeben durch:

$$W = \int_0^w (\lambda_0 - \lambda) dw = \int_0^w p_0 v_0 AT \frac{\partial}{\partial t} \log \frac{p_0}{p},$$

wobei  $p$  der Dampfdruck der Salzlösung bei einer Tempera-

1) Pauchon, Compt. rend. 89. p. 752—754. 1879. Beibl. 4. p. 446. 1880.

2) de Coppet, Handb. der allg. u. phys. Chemie. p. 456.

3) Raoult, Compt. rend. 87. p. 167—169. 1878. Beibl. 2. 595. 1878.



tur  $T$ ,  $p_0$ ,  $v_0$  Druck und spezifisches Volumen des gesättigten Wasserdampfes, der reinem Wasser zugehört, vorstellen soll. Dieses Resultat ist, wie ich später erfahren habe, schon vor 23 Jahren von Kirchhoff gefunden worden und ist bis zu einem gewissen Grade von Moutier<sup>1)</sup> für Kaliumnitrat mit den Messungen von Wüllner und Person in Einklang gebracht worden. Eine genaue Untersuchung des Spannkraftgesetzes bei niederen Temperaturen wäre mit Rücksicht auf die vorhandenen neueren Daten über Wärmeverbrauch beim Lösen von Salzen wünschenswerth, und zwar würde sich das in diesen Annalen letzthin beschriebene Verfahren des Hrn. James Moser mehr empfehlen, weil hier nicht das schwere Quecksilber, sondern Wasser als manometrische Flüssigkeit verwendet wird.

Eine zweite Bemerkung gilt der in unseren Entwicklungen supponirten Annahme, dass die spezifische Wärme der Lösung sich wenig mit der Temperatur innerhalb des Intervalles  $T_1$   $T$  verändert. Diese Annahme ist ungültig in allen Fällen, wo das Salz in der Lösung chemische Veränderungen erfährt, allenfalls Hydratwasser aufnimmt oder sich vielleicht dissociirt. In der specifischen Wärme muss sich eine derartige Veränderung durch einen Sprung oder wenigstens durch eine rasche Veränderlichkeit des  $c$  innerhalb eines engen Temperaturintervalles kundgeben. Aber auch der Verlauf der Dampfcurve wird hierdurch stark beeinflusst. Nehmen wir einfachheitshalber an, das Niveau der Energie der Lösung verändere sich plötzlich beim Durchgange durch eine gewisse Temperatur, so werden sich die Schlüsse, die bezüglich Eis und Wasser bei der Temperatur 0 anwendbar sind, auch hier anwenden lassen. Ist  $v(dp/dt)TA$  die Verdampfungswärme knapp unterhalb dieser Temperatur,  $v(\partial p'/\partial t)TA$  jene knapp oberhalb derselben, so übertrifft erstere die letztere um jenen Betrag an Energie  $E$ , der der Gewichtseinheit des Stoffes unterhalb dieser zugeführt werden muss, um ihn in den Zustand oberhalb dieser Temperatur zu bringen. Die Dampfcurve erfährt dann hier eine Knickung,

1) Moutier, Chem. Centralbl. Jahrg. 1873.



sodass  $dp/dt - dp'/dt = E/TA\nu$  wird. Verläuft von da ab die Dampfcurve weniger steil, ist also  $\partial p/\partial t < \partial p'/\partial t$ ,  $E$  negativ, so wird die Eiscurve früher getroffen, die wirkliche Gefrierpunktserniedrigung wird kleiner als die berechnete ergibt. In diesem Falle wird der Coëfficient der Erniedrigung des Gefrierpunktes  $\vartheta$  kleiner werden als der berechnete, was aber, da  $E$  negativ ist, einer Art Dissociation des Salzes in der Lösung entspricht. Tritt dagegen (bei concentrirteren Lösungen) eine chemische Verbindung ein, so wird  $E$  positiv, was mit einem Wachsen des Coëfficienten  $\vartheta$  verbunden ist. Zu ähnlichen Schlüssen ist auch de Coppet<sup>1)</sup> gekommen.

Brünn, October 1881.

**IV. Bemerkung zu Hrn. Wüllner's Aufsatz:  
„Ueber die Spectra des Wasserstoffs und des  
Acetylens“<sup>2)</sup>; von Dr. B. Hasselberg.**

Bekanntlich hatte vor mehreren Jahren Herr Wüllner in sehr weit evacuirtten Wasserstoffröhren ein neues, aus zahlreichen scharfen Linien im Grünen und Blauen bestehendes Spetrum gefunden, welches er, da dasselbe in anderen, mit Sauerstoff oder Stickstoff gefüllten Röhren nicht auftrat, als ein neues Wasserstoffspectrum bezeichnete.<sup>3)</sup> Schon damals machte Ångström<sup>4)</sup> darauf aufmerksam, dass dieses Spectrum sehr wahrscheinlich dem Schwefel angehörte, da die von Wüllner beobachteten Linien mit den Hauptlinien dieses Elements sehr nahe übereinstimmten, und das Auftreten derselben in der Anwendung der Schwefelsäure zum Austrocknen des Gases eine sehr plausible Erklärung finden konnte. Da diese Einwendungen von

1) De Coppet, Handb. der allgem. u. phys. Chemie von A. Naumann, p. 457.

2) Wüllner, Wied. Ann. 14. p. 355. 1881.

3) Wüllner, Pogg. Ann. 135. p. 497. 1868.

4) Ångström, Compt. rend. 73. p. 568. 1871.

Wüllner entschieden zurückgewiesen wurden, ohne dass indessen die für die Unrichtigkeit derselben angeführten Gründe als genügend bindend angesehen werden können, so habe ich in einem neulich erschienenen Aufsatz<sup>1)</sup> die Resultate einer Versuchsreihe mitgetheilt, durch welche, wie ich hoffe, in unzweifelhafter Weise, die Richtigkeit der Ångström'schen Ansicht in Bezug auf die Natur des erwähnten Spectrums bewiesen sein dürfte, und aus denen ausserdem hervorgeht, dass der Schwefel, wenigstens bei meinen Versuchen, aus dem durch die electricische Entladung verdampfenden Glase stammt. Wenn nun auch hierdurch die Frage wohl als erledigt zu betrachten sein dürfte, so kann es mir jedoch nur zu um so grösserer Befriedigung gereichen, dass Wüllner neuerdings selbst zu ähnlichen Schlüssen gelangt ist, indem er in dem obengenannten Aufsätze die Vermuthung äussert, dass das fragliche Spectrum von dem verdampfenden Glase herührt. — Diese Vermuthung wäre ohne Zweifel zur Gewissheit geworden, wenn Wüllner meine hierauf bezüglichen Untersuchungen gekannt hätte. Dies scheint aber nicht der Fall gewesen zu sein, da er sonst seine älteren Einwürfe gegen Ångström, diesen Punkt betreffend, wahrscheinlich zurückgenommen hätte. —

An eine Behauptung Wüllner's möchte ich mir indessen erlauben, einige Bemerkungen anzuknüpfen. Wüllner meint, dass nur bei Wasserstofffüllung die Temperatur der Röhre eine so hohe werden könne, dass das fragliche Spectrum erscheint, dass aber, wenn die Röhren andere Gase enthalten, höchstens die Natriumlinien auftreten. Zu dieser Annahme scheint mir jedoch kein genügender Grund vorhanden zu sein. Denn wenn das bei starker Verdünnung in der Spectralröhre auftretende grüne Licht und dessen Spectrum irgend einem Bestandtheil des verdampfenden Glases zuzuschreiben ist, so ist es a priori wahrscheinlich, dass hierbei die Natur des eingeschlossenen Gases von nur unwesentlichem Einfluss ist, und dass die Erscheinung hauptsächlich von der grösseren oder kleineren Strengflüssigkeit

1) Hasselberg, Bull. de l'Acad. de St. Pétersb. 27. p. 97. 1880.

des Glases abhängt. — Dass dem wirklich so ist, geht daraus hervor, dass bei Wüllner's Versuchen die Röhren mit Wasserstoff, bei den meinigen mit Luft gefüllt waren, sowie auch daraus, dass ich unter mehreren geprüften Glassorten nur eine fand, welche die Erscheinung zeigte.

Das Auftreten des Schwefelspectrums unter den von Wüllner und mir bezeichneten Verhältnissen ist indessen nicht immer mit dem Erscheinen der grünen Farbe des Rohres verknüpft, im Gegentheil ist das Spectrum dieses Lichtes viel häufiger dasjenige des Chlors, und auf dieses Element ist auch das neue, von Wüllner zuerst dem Sauerstoff, später der Kohle zugeschriebene Linienspectrum zurückzuführen, wie ich in Uebereinstimmung mit einer schon von Ångström ausgesprochenen Ansicht in einem zweiten neulich erschienenen Aufsatze<sup>1)</sup> näher auseinandergesetzt habe. —

Ein Bestandtheil des Glases, welcher viel leichter durch den hindurchgehenden Strom verflüchtigt wird als Chlor und Schwefel, ist das Natrium. Das Auftreten des Spectrums desselben findet nämlich, wie ich häufig zu beobachten Gelegenheit gehabt, nicht nur bei stärkeren Verdünnungen, sondern auch unter Umständen bei ziemlich beträchtlichem Drucke des eingeschlossenen Gases statt, und dabei verschwinden stets die Linien des letzteren an allen denjenigen Stellen der Röhre, wo die Verdampfung des Metalls eine grössere Lebhaftigkeit erreicht. Bei Anwendung einer kleinen mit Wasserstoff gefüllten Spectralröhre, deren capillarer Theil eine Länge von etwa 25 mm und einen inneren Durchmesser von 1 mm besass, wurden nämlich u. a. folgende Erscheinungen beobachtet ( $P$  = Druck des Gases):

$P = 55$  mm. Das Spectrum besteht zunächst aus den Linien des Wasserstoffs, neben denen schwache Spuren der Streifen des Kohlenoxyds erscheinen. Nachdem die Entladungen einige Zeit durch die Röhre gegangen, wurde die eine Hälfte der Capillare hell goldgelb, und es trat auf ganz dunklem Grunde ein prachtvolles Natriumspectrum auf, in

1) Hasselberg, Bull. de l'Acad. de St. Petersb. 27, p. 405. 1881.

welchem nicht nur alle von Thalén verzeichneten Linien mit grossem Glanz erschienen, sondern auch jenseits  $H_\beta$  wenigstens drei oder vier der schon von Liveing und Dewar im electrischen Flammenbogen beobachteten neuen Linienpaare des Metalls vertreten waren.<sup>1)</sup> Dass die Linie  $\lambda = 4982,5$  (Thalén) entschieden doppelt ist, liess sich dabei in Uebereinstimmung mit einer Beobachtung von Lockyer unzweifelhaft constatiren.

Stellt man die Röhre vor dem Spectroskope so auf, dass die scharfe Begrenzung des gelbleuchtenden Theiles des Spectrums der Mitte des Spaltes entspricht, so erscheinen in der einen Hälfte desselben die Wasserstofflinien, in der anderen die des Natriums. Die Trennung ist so scharf, als wenn das Spectrum in zwei Hälften zerschnitten wäre; nur die den *D*-Linien entsprechenden Natriumlinien ragen in das Wasserstoffspectrum etwas hinein.

$P = 16$  mm. Ausser einer grösseren Helligkeit der Natriumlinien ist keine wesentliche Veränderung im Spectrum zu bemerken. Die in Wasserstoffröhren gewöhnlichen Liniencomplexe um *D* herum beginnen indessen zu erscheinen.

$P = 5$  mm. Das Natriumspectrum ist bis auf die Linien 5895, 5889 und Spuren von 5687, 5681 verschwunden. Statt dessen erscheinen die Wasserstofflinien wieder.

Aehnliche Erscheinungen wurden in einer anderen mit Luft gefüllten Röhre beobachtet. Man sieht also hieraus, dass, sobald das Glühen des aus dem Glase verflüchtigten Metalls genügend intensiv wird, das in der Röhre eingeschlossene Gas aufhört, der Träger der Entladung zu sein, und deshalb wohl schwerlich auf das Eintreten dieses Glühens irgend einen wesentlich bestimmenden Einfluss haben kann. In dieser Ansicht bin ich noch weiter durch die folgende Beobachtung bestätigt worden, welche ich an einer alten Stickstoffröhre zu machen Gelegenheit gehabt habe. Die fragliche Röhre, welche lange Zeit ein schönes Bandenspectrum gezeigt, änderte plötzlich ihr Aussehen in

<sup>1)</sup> Liveing u. Dewar, Proc. Roy. Soc. Nr. 29. p. 398. 1879.

der schon von Reitlinger und Kuhn beschriebenen Weise und zeigt nunmehr statt des Bandenspectrums ein sehr vollständiges Linienspectrum des Stickstoffes neben einem eben so vollständigen Spectrum des Chlors. Ich glaube demnach, dass die Natur des eingeschlossenen Gases in Bezug auf diese Erscheinungen eine ganz untergeordnete Rolle spielt, und dass jeder Umstand, welcher eine Steigerung der Entladungstemperatur begünstigt, in jeder Röhre ähnliche Erscheinungen hervorrufen kann.

Pulkowa, November 1881.

**V. *Fresnel's Interferenzerscheinungen;*  
*theoretisch und experimentell bearbeitet von*  
*Hermann Struve.***

(Dissertation im Auszuge.)

Im 8. Bande dieser Annalen machte Prof. H. Weber darauf aufmerksam, dass die von Fresnel gegebene und von vielen Beobachtern als richtig anerkannte Beschreibung der nach ihm benannten Interferenzerscheinungen nicht befriedigend sei, und hob insbesondere hervor, dass die mit den gewöhnlichen Fresnel'schen Interferenzapparaten erzeugten Fransen im Gegensatze zu Fresnel's Theorie erheblich verschiedene Breiten und Helligkeiten besitzen können, und dass stets die schmälern Fransen schwächere und die breiteren stärkere Helligkeitsmaxima aufweisen. Diese Umstände liessen vermuthen, dass erhebliche Diffractionswirkungen bei diesen Erscheinungen stattfänden und veranlassten Prof. Weber, deren Einfluss genauer zu untersuchen. Ausgehend von den bekannten Principien der Diffraction stellte er den allgemeinen Ausdruck für die Lichtintensität eines Punktes im Interferenzraum auf, führte die dabei auftretenden Fresnel'schen Integrale auf Transcendenten zurück, welche mit den Bessel'schen Functionen verwandt sind, und gewann schliesslich für die Intensitäten und die Lage der Maxima

und Minima verhältnissmässig einfache Ausdrücke und Gleichungen, aus denen sich die oben erwähnten Thatsachen leicht folgern liessen.

Die Weber'schen Entwicklungen lassen sich jedoch wesentlich durch die Bemerkung abkürzen, dass der Ausdruck für die Lichtintensität unmittelbar auf die beiden Functionen:

$$M(v) = \int_v^{\infty} \cos(\xi^2 - v^2) d\xi, \quad N(v) = \int_v^{\infty} \sin(\xi^2 - v^2) d\xi$$

führt, welche mit den gewöhnlichen Fresnel'schen Integralen durch einfache Relationen zusammenhängen, sich aber vor denselben dadurch auszeichnen, dass sie für positive Argumente  $v$  keine periodische, sondern eine stetige Abnahme besitzen. Durch eine leichte Transformation kann man nämlich diesen Functionen für positive Argumente die folgende Form geben:

$$M(v) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{x^2 \cdot e^{-v^2 x^2} \cdot dx}{1 + x^4}, \quad N(v) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-v^2 x^2} \cdot dx}{1 + x^4},$$

aus welcher unmittelbar ersichtlich ist, dass dieselben für positive Argumente stets positiv sind und mit wachsendem  $v$  stetig von  $\frac{1}{2}\sqrt{\pi/2}$  bis 0 abnehmen. Es ist ferner stets  $M(v) < N(v)$ , und zwar nimmt das Verhältniss  $M(v)/N(v)$  sehr rasch mit wachsendem  $v$  ab. Berücksichtigt man ausserdem, dass:

$$\int_0^{\infty} x^{4n} e^{-v^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{(4n)!}{4^{2n} \cdot (2n)! \cdot v^{4n+1}},$$

so gewinnt man für  $M(v)$  und  $N(v)$  sofort die semiconvergenten Reihen:

$$M(v) = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (4n+1)}{4^{n+1} \cdot v^{4n+3}}, \quad N(v) = \frac{1}{2v} + \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \dots (4n-1)}{2 \cdot 4^n \cdot v^{4n+1}},$$

woraus zu schliessen ist, dass für einigermaßen beträchtliche Werthe von  $v$  mit grosser Annäherung  $M(v) = 0$ ,  $N(v) = 1/2v$  gesetzt werden darf.

Die Functionswerthe für negative Argumente hängen ferner mit denjenigen für positive Argumente durch die Relationen:

$$M(-v) = \sqrt{\pi} \cdot \sin\left(v^2 + \frac{\pi}{4}\right) - M(v),$$

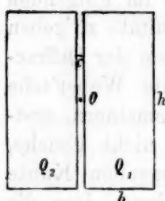
$$N(-v) = \sqrt{\pi} \cdot \cos\left(v^2 + \frac{\pi}{4}\right) - N(v) \quad \text{zusammen.}$$

Gestützt auf diese Eigenschaften, will ich im Folgenden eine kürzere Herleitung der Weber'schen Resultate zu geben versuchen. Dabei werde ich von einem Problem der Diffractionstheorie ausgehen, welches ermöglicht, die Weber'sche Theorie noch nach zwei Seiten hin zu verallgemeinern, erstlich dahin, dass die virtuellen Lichtpunkte nicht gleiche, sondern verschiedene Abstände von der beugenden Kante haben können, und zweitens durch die Annahme, dass die beugende Kante keine mathematische Linie ist, sondern eine im Vergleich zur Wellenlänge des Lichtes nicht zu vernachlässigende Breite besitzt. Im Fall der Interferenzapparat ein Doppelspiegel ist, würden diese Annahmen gleichbedeutend damit sein, dass die mathematische Durchschnittslinie der Spiegelebenen nicht mit der beugenden Kante zusammenfällt, und dass die beiden Spiegel nicht vollständig aneinander grenzen. Es wird sich hierbei zeigen, dass die Verschiedenheit der Interferenzfransen in Breite und Helligkeit wesentlich davon abhängt, mit welcher Phasendifferenz die von den virtuellen Lichtpunkten ausgehenden Schwingungen in der beugenden Kante zusammentreffen. Die Untersuchung des Einflusses, den eine Breite der beugenden Kante auf die Erscheinungen ausübt, ist ferner nothwendig, wenn man die Fresnel'schen Interferenzerscheinungen nicht nur qualitativ, sondern auch quantitativ mit der Theorie vergleichen will. Während eines dreimonatlichen Aufenthalts in Graz war ich durch die Güte der Professoren Boltzmann und Eittingshausen in den Stand gesetzt, zum Zwecke einer genaueren Prüfung der Theorie einige Messungsreihen auszuführen, deren Beschreibung und Zusammenstellung ich den theoretischen Entwicklungen folgen lassen werde.

Das Problem, das ich an die Spitze der folgenden Untersuchung stellen will, lässt sich folgendermassen aussprechen.



Denken wir uns einen sich ins Unendliche erstreckenden ebenen Schirm; in demselben seien zwei gleiche rechteckige Oeffnungen  $Q_1$   $Q_2$  angebracht, welche die Höhe  $h$  und die Breite  $b$  besitzen und durch einen kleinen Zwischenraum voneinander getrennt sind, den wir



die beugende Kante nennen wollen; ihr Mittelpunkt sei  $O$ , und ihre Breite  $c$ . Es seien ferner zwei leuchtende Punkte  $L_1$   $L_2$  vorhanden, die gleichartige Schwingungen, aber von verschiedener Phase ausführen, deren Schwingungen also durch:

$$\omega_1 = \sin \left( \vartheta_1 - \frac{2\pi}{T} t \right), \quad \omega_2 = \sin \left( \vartheta_2 - \frac{2\pi}{T} t \right)$$

dargestellt sein mögen. Durch einen zwischengeschobenen zweiten Schirm möge bewirkt sein, dass die von  $L_1$  kommenden Strahlen nur die Oeffnung  $Q_1$ , die von  $L_2$  kommenden nur die Oeffnung  $Q_2$  passiren können. Das Problem besteht dann darin: die Intensität in irgend einem Punkte  $P$  hinter dem Schirm zu bestimmen und den Ort der Lichtmaxima und -minima anzugeben.

Ueber die Lage von  $L_1$  und  $L_2$  wollen wir zunächst nur die einschränkende Voraussetzung machen, dass die Geraden  $OL_1$  und  $OL_2$  sehr kleine Winkel mit der Normale des Schirms einschliessen; unbeschadet der Allgemeinheit können wir dann ferner annehmen, dass auch die Gerade  $OP$  einen sehr kleinen Winkel mit der Normale bildet, und dass die Abstände der Punkte  $PL_1$   $L_2$  von  $O$  sehr gross im Vergleich zu den Dimensionen der Oeffnungen sind. Da nämlich der Einfluss der Beugung um so kleiner ist, je weiter die directen Strahlen an der beugenden Kante vorbeigehen, so würde die Aufgabe sich nur vereinfachen, wenn man andere Lagen für den Punkt  $P$  oder grössere Dimensionen für die Oeffnungen annehmen wollte.

Das hier gestellte Problem ist offenbar eine sehr naheliegende Verallgemeinerung der bekannten Aufgabe aus der Theorie der Fresnel'schen Beugungserscheinungen: die Intensität in einem Punkte  $P$  zu bestimmen, wenn die von



einem Punkte  $L$  ausgehenden Lichtstrahlen durch eine rechteckige Oeffnung gebeugt werden. Damit ist uns auch der Weg angezeigt, den wir zur Lösung unserer Aufgabe einzuschlagen haben.

Wir wollen den Mittelpunkt der beugenden Kante  $O$  zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Coordinatensystems wählen; die Normale des Schirmes in  $O$  möge die  $Z$ -Axe sein, positiv nach der Seite von  $P$  hin gerechnet; die  $X$ -Axe sei senkrecht zur beugenden Kante, positiv in der Richtung nach  $Q_1$  hin.

Sind dann  $r_0, r_1, r_2$  die Abstände eines Elements der Oeffnung  $dx, dy$  von  $P, L_1, L_2$ , so können wir dem Huygens'schen Principe zufolge die von  $L_1$  nach  $P$  gesandte Bewegung durch:

$$\omega_1 = K_1 \int_{Q_1} \cos \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} (r_0 + r_1) + \vartheta_1 - \frac{2\pi}{T} \cdot t \right\} \cdot dx dy$$

ausdrücken und analog die von  $L_2$  nach  $P$  gesandte Bewegung durch:

$$\omega_2 = K_2 \int_{Q_2} \cos \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} (r_0 + r_2) + \vartheta_2 - \frac{2\pi}{T} \cdot t \right\} \cdot dx dy,$$

wo das erste Integral über alle Elemente von  $Q_1$ , das zweite über alle Elemente von  $Q_2$  zu erstrecken ist, und wo  $K_1$  und  $K_2$  zwei von den Entfernungen  $OP, OL_1$ , resp.  $OP, OL_2$  abhängige Grössen bedeuten.

Führen wir nun folgende Bezeichnungen ein:

$$C_i = K_i \int_{Q_i} \cos \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} (r_0 + r_i) + \vartheta_i \right\} \cdot dx dy,$$

$$S_i = K_i \int_{Q_i} \sin \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} (r_0 + r_i) + \vartheta_i \right\} \cdot dx dy,$$

so erhalten wir als resultirende Bewegung von  $P$ :

$$\Omega = \omega_1 + \omega_2 = (C_1 + C_2) \cdot \cos \left( \frac{2\pi}{T} t \right) + (S_1 + S_2) \cdot \sin \left( \frac{2\pi}{T} t \right),$$

und demnach für die Intensität von  $P$  den Ausdruck:

$$J = (C_1 + C_2)^2 + (S_1 + S_2)^2.$$

Es seien nun:

$x_0 y_0$   $x_i y_i$  die Coordinaten der Punkte  $P$ ,  $L_i$ ,  
 $\varrho_0$   $\varrho_i$  die Entfernungen der Punkte  $P$ ,  $L_i$  von  $O$ ,  
 $xy$  die Coordinaten eines Elementes  $dxdy$  der Oeffnung,  
dann ist:

$$r_0^2 = \varrho_0^2 - 2(x x_0 + y y_0) + x^2 + y^2,$$

$$r_i^2 = \varrho_i^2 - 2(x x_i + y y_i) + x^2 + y^2.$$

Den gemachten Annahmen gemäss sollen  $x$ ,  $y$   $x_0$ ,  $y_0$   $x_i$ ,  $y_i$  sehr kleine Grössen im Vergleich zu  $\varrho_0$   $\varrho_i$  sein. Nehmen wir noch präziser an, dass schon  $x^4/\varrho_i^3$ ,  $y^4/\varrho_i^3$  etc. verschwindend klein gegen  $\lambda$  sind, so können wir schreiben:

$$\frac{2\pi}{\lambda}(r_0 + r_i) = \frac{2\pi}{\lambda}(\varrho_0 + \varrho_i) - \frac{2\pi}{\lambda}x \cdot \left(\frac{x_0}{\varrho_0} + \frac{x_i}{\varrho_i}\right) - \frac{2\pi}{\lambda}y \cdot \left(\frac{y_0}{\varrho_0} + \frac{y_i}{\varrho_i}\right) + \frac{\pi}{\lambda}(x^2 + y^2) \cdot \left(\frac{1}{\varrho_0} + \frac{1}{\varrho_i}\right),$$

und wenn wir zur Abkürzung setzen:

$$m_i = \frac{\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{\varrho_0} + \frac{1}{\varrho_i} \right),$$

$$u_i = (-1)^i \sqrt{m_i} \cdot \frac{x_0 \varrho_i + x_i \varrho_0}{\varrho_0 + \varrho_i}, \quad v_i = -\sqrt{m_i} \cdot \frac{y_0 \varrho_i + y_i \varrho_0}{\varrho_0 + \varrho_i}$$

und für  $x$  und  $y$  die neuen Veränderlichen:

$$\xi = (-1)^{i-1} \sqrt{m_i} x + u_i, \quad \eta = \sqrt{m_i} y + v_i$$

einführen:

$$\frac{2\pi}{\lambda}(r_0 + r_i) = \frac{2\pi}{\lambda}(\varrho_0 + \varrho_i) + (\xi^2 - u_i^2) + (\eta^2 - v_i^2).$$

Demnach wird:

$$(1) \begin{cases} J = (C_1 + C_2)^2 + (S_1 + S_2)^2, \\ C_i = \frac{K_i}{m_i} \iint \cos \left\{ \frac{2\pi}{\lambda}(\varrho_0 + \varrho_i) + \vartheta_i + (\xi^2 - u_i^2) + (\eta^2 - v_i^2) \right\} d\xi d\eta, \\ S_i = \frac{K_i}{m_i} \iint \sin \left\{ \frac{2\pi}{\lambda}(\varrho_0 + \varrho_i) + \vartheta_i + (\xi^2 - u_i^2) + (\eta^2 - v_i^2) \right\} d\xi d\eta \end{cases}$$

wo die Integrationen zu erstrecken sind:

$$\text{für } \xi \text{ von } \sqrt{m_i} \cdot \frac{c}{2} + u_i \text{ bis } \sqrt{m_i} \left( b + \frac{c}{2} \right) + u_i,$$

$$\text{für } \eta \text{ von } -\sqrt{m_i} \cdot \frac{h}{2} + v_i \text{ bis } +\sqrt{m_i} \cdot \frac{h}{2} + v_i.$$

Das in allen vier Integralen  $C_i, S_i$  innerhalb der Klammer vorkommende constante Glied  $(2\pi/\lambda)\varrho_0$  kann überall fortgelassen werden, da man eine beliebige Constante den Klammerausdrücken hinzufügen kann, ohne dass dadurch der Werth von  $J$  sich ändert; in der That würde das Hinzufügen einer solchen Constante nur bedeuten, dass man die Phase beider Lichtpunkte um gleich viel ändert, was auf die Intensität in  $P$  keinen Einfluss haben kann.

Eine wesentlich einfachere Gestalt erhält der Ausdruck für die Intensität, wenn  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$ , sowie  $y_1$  und  $y_2$  nur wenig voneinander verschieden sind, womit nicht gesagt sein soll, dass  $\varrho_1 - \varrho_2$  nicht noch eine beträchtliche Grösse gegen  $\lambda$  sein kann. Nimmt man jetzt zur Coordinatenebene  $YZ$  diejenige Ebene, welche den durch die  $Y$ -Axe und die Lichtpunkte  $L_1$  und  $L_2$  bestimmten Winkel halbirt, und die wir im Folgenden die Mittelebene nennen wollen, und bezeichnet man mit  $y$  und  $\varrho$  die Mittelwerthe von  $y_1$  und  $y_2$ , resp.  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  und mit  $x$  den Abstand der Lichtpunkte von der Mittelebene, so kann man:

$$m_i = m = \frac{\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{\varrho_0} + \frac{1}{\varrho} \right), \quad K_i = K,$$

$$u_i = -\sqrt{m} \cdot \frac{x\varrho_0 + (-1)^{i-1} \cdot x_0\varrho}{\varrho_0 + \varrho}, \quad v_i = v = -\sqrt{m} \frac{y\varrho_0 + y_0\varrho}{\varrho_0 + \varrho}$$

setzen und erhält alsdann:

$$J = F(y_0) \cdot \{ (C_1 + C_2)^2 + (S_1 + S_2)^2 \},$$

$$C_i = \int \frac{\sqrt{m} \left( b + \frac{c}{2} \right) + u_i}{\sqrt{m} \cdot \frac{c}{2} + u_i} \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} \varrho_i + \vartheta_i + \xi^2 - u_i^2 \right) \cdot d\xi,$$

$$S_i = \int \frac{\sqrt{m} \left( b + \frac{c}{2} \right) + u_i}{\sqrt{m} \cdot \frac{c}{2} + u_i} \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda} \varrho_i + \vartheta_i + \xi^2 - u_i^2 \right) \cdot d\xi,$$

wo  $F(y_0)$  eine von  $x_0$  unabhängige Function von  $y_0$  bedeutet, welche die Wirkung der Beugung von den zur beugenden Kante senkrechten Begrenzungen der Oeffnungen darstellt. Diese Diffractionswirkung ist offenbar ganz dieselbe wie in

dem Fall, wo nur ein leuchtender Punkt und eine einzige beugende Oeffnung vorhanden sind, und man darf dieselbe ganz ausser Acht lassen, falls es nur darauf ankommt, die Intensitäten der auf einer und derselben Ordinate  $y_0$  gelegenen Punkte miteinander zu vergleichen. Setzt man aber ausserdem noch voraus, dass  $h$  hinreichend gross ist, und beschränkt die Untersuchung auf solche Lagen von  $P$ , für welche  $v$  erheblich kleiner ist als  $\frac{1}{2}\sqrt{m} \cdot h$ , so kann man auch  $F(y_0) = \text{Const.}$  setzen, wo alsdann die Intensität nur noch mit  $x_0$  variirt.

Eine weitere Vereinfachung ergibt sich, wenn man die Breite  $b$  der beugenden Oeffnung so gross annimmt, dass man von der Beugung an den der beugenden Kante gegenüberliegenden Begrenzungen absehen kann. Diese Annahme ist gleichbedeutend damit: die obere Integrationsgrenze  $\sqrt{m} \cdot (b + \frac{1}{2}c) + u_i$  durch  $\infty$  zu ersetzen, und man wird infolge der Eigenschaft der Functionen  $M(v)$  und  $N(v)$  mit wachsendem  $v$  sich rasch der 0 zu nähern, schon bei mässigen Werthen von  $b$  zu dieser Annahme berechtigt sein. Mit Fortlassung des Factors  $F(y_0)$  erhält man nunmehr für die Intensität:

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} J &= (C_1 + C_2)^2 + (S_1 + S_2)^2, \\ C_i &= \int_{\sqrt{m} \cdot \frac{c}{2} + u_i}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \rho_i + \vartheta_i + \xi^2 - u_i^2\right) \cdot d\xi, \\ S_i &= \int_{\sqrt{m} \cdot \frac{c}{2} + u_i}^{\infty} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \rho_i + \vartheta_i + \xi^2 - u_i^2\right) \cdot d\xi, \end{aligned} \right.$$

und dieser Ausdruck behält seine Gültigkeit auch in dem Fall, wenn statt zweier leuchtender Punkte zwei leuchtende Linien gegeben sind, welche der beugenden Kante parallel sind, und deren Punkte paarweise in derselben Beziehung zueinander stehen wie  $L_1$  und  $L_2$ .

Dreht man endlich die Ebene des Schirms um einen beliebigen Winkel um die  $Y$ -Axe, und ist  $c$  erheblich kleiner als  $2x$ , so bleibt der für  $J$  gefundene Ausdruck ebenfalls

bestehen, wofern man nur an Stelle von  $c$  die Projection von  $c$  auf die Coordinatenebene  $XY$  setzt.

In welcher Weise das soeben behandelte Diffractionsproblem mit den Fresnel'schen Interferenzerscheinungen zusammenhängt, lässt sich leicht einsehen. Denken wir uns z. B. die Interferenzerscheinung durch einen Doppelspiegel hervorgerufen, welcher so beschaffen ist, dass erstlich die mathematische Durchschnittslinie der Spiegelebenen nicht vollkommen zusammenfällt mit der Kante, in welcher die Spiegel aneinander grenzen, sondern derselben parallel ist, das zweitens ein kleiner Zwischenraum zwischen den beiden Spiegeln übrig bleibt, und dass drittens das von dem einen Spiegel reflectirte Licht eine Phasendifferenz  $\vartheta_1 - \vartheta_2$  gegen das von dem anderen Spiegel reflectirte besitzt, so haben wir es hier offenbar mit denselben Bedingungen zu thun, wie bei der soeben besprochenen Aufgabe: die beiden virtuellen Lichtpunkte und den Doppelspiegel können wir uns ersetzt denken durch zwei natürliche Lichtpunkte und einen Schirm mit zwei Oeffnungen und daher den in (2) aufgestellten Intensitätsausdruck als Ausgangspunkt für die weitere Untersuchung ansehen.

Wir wollen nun zunächst den idealen Fall näher ins Auge fassen, wo die Spiegel in der Durchschnittslinie ihrer Ebenen vollkommen aneinander grenzen, und ferner annehmen, dass  $\vartheta_1 = \vartheta_2$  ist, was immer der Fall sein wird, wenn die beiden Spiegel aus gleichem Material verfertigt sind.

Alsdann ist  $(2\pi/\lambda)\varrho_1 = (2\pi/\lambda)\varrho_2$  und  $c = 0$ , und man erhält aus (2):

$$C_i = \int_{u_i}^{\infty} \cos(\xi^2 - u_i^2) d\xi = M(u_i) \quad S_i = \int_{u_i}^{\infty} \sin(\xi^2 - u_i^2) d\xi = N(u_i)$$

und demnach:

$$(3) \quad J = (M(u_1) + M(u_2))^2 + (N(u_1) + N(u_2))^2,$$

$$\text{wo: } u_i = -\sqrt{\frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{\varrho_0 \varrho}{\varrho_0 + \varrho}} \left( \frac{x}{\varrho} + (-1)^{i-1} \cdot \frac{x_0}{\varrho_0} \right).$$

Zu ganz dem nämlichen Ausdruck gelangt man auch, wenn man als Interferenzapparat ein vollkommenes Doppel-

prisma voraussetzt, dessen brechende Winkel übrigens beliebig verschieden sein können; man hat dann nämlich in (2) ebenfalls  $c = 0$  und entsprechend der Phasendifferenz der virtuellen Lichtpunkte:  $\vartheta_1 = -(2\pi/\lambda)\varrho_1$ ,  $\vartheta_2 = -(2\pi/\lambda)\varrho_2$  zu setzen.

Die Lage der Helligkeitsmaxima und -minima ergibt sich aus der Bedingung, dass für dieselben  $\partial J/\partial x_0 = 0$  oder, wegen  $\partial u_1/\partial x_0 = -\partial u_2/\partial x_0$ ,  $\partial J/\partial u_1 - \partial J/\partial u_2 = 0$  sein muss. Da nun:

$$\frac{\partial M(u)}{\partial u} = -1 + 2u \cdot N(u) \quad \frac{\partial N(u)}{\partial u} = -2u \cdot M(u),$$

so folgt aus (3) unmittelbar die Gleichung:

$$(4) \quad M(u_1) \cdot N(u_2) - M(u_2) \cdot N(u_1) = 0.$$

Je nach der Lage des Punktes  $P$  haben wir jetzt zwei verschiedene Fälle zu unterscheiden. Liegt erstens  $P$  ausserhalb des von den Ebenen  $OL_1$  und  $OL_2$  begrenzten Raumes, den wir den Interferenzraum nennen werden, so haben  $u_1$  und  $u_2$  entgegengesetztes Vorzeichen. Ferner wird, da  $V\pi/\lambda \cdot \varrho_0\varrho/(\varrho_0 + \varrho)$  sehr gross ist, im allgemeinen eine dieser Grössen einen beträchtlichen negativen Werth besitzen, nämlich  $u_1$ , wenn  $P$  jenseits  $OL_2$ , und  $u_2$ , wenn  $P$  jenseits  $OL_1$  liegt. Im ersteren Falle wird es daher erlaubt sein:

$$M(u_1) = V\pi \cdot \sin\left(u_1^2 + \frac{\pi}{4}\right), \quad N(u_1) = V\pi \cdot \cos\left(u_1^2 + \frac{\pi}{4}\right)$$

zu setzen, und damit erhält man:

$$J = \pi + 2V\pi \left\{ M(u_2) \cdot \sin\left(u_1^2 + \frac{\pi}{4}\right) + N(u_2) \cdot \cos\left(u_1^2 + \frac{\pi}{4}\right) \right\} + M(u_2)^2 + N(u_2)^2,$$

ferner zur Bestimmung der Lage der Maxima und Minima:

$$\operatorname{tg}\left(u_1^2 + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{M(u_2)}{N(u_2)}$$

und endlich für die in den Maximis und Minimis auftretenden Helligkeiten:

$$J = \pi \pm 2V\pi N(u_2) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{M(u_2)}{N(u_2)}\right)^2} + M(u_2)^2 + N(u_2)^2.$$

Je weiter man sich von der Grenzebene  $OL_2$  entfernt, um so kleiner werden  $M(u_2)$  und  $N(u_2)$ , und um so mehr nähert sich folglich  $J$  dem constanten Grenzwerthe  $\pi$ . Zu-

gleich rücken die Maxima und Minima immer näher und näher an einander, und da  $M(u_2)$  mit wachsendem  $u_2$  sehr viel rascher abnimmt als  $N(u_2)$ , so wird die Lage derselben angenähert durch  $u_1 = \sqrt{(n - \frac{1}{4})} \cdot \pi$ ,  $n = 1, 2, 3 \dots$  bestimmt sein. Analoges gilt für Punkte jenseits der Ebene  $OL_1$ .

Liegt andererseits  $P$  innerhalb des Interferenzraumes, so haben  $u_1$  und  $u_2$  gleiche, und zwar negative Vorzeichen. Bezeichnet man die absoluten Werthe dieser Grössen mit  $v_1$  und  $v_2$ , so hat man folglich:

$$M(u_i) = \sqrt{\pi} \cdot \sin\left(v_i^2 + \frac{\pi}{4}\right) - M(v_i),$$

$$N(u_i) = \sqrt{\pi} \cdot \cos\left(v_i^2 + \frac{\pi}{4}\right) - N(v_i),$$

und daher nach (3):

$$J = \left\{ \sqrt{\pi} \left( \sin\left(v_1^2 + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(v_2^2 + \frac{\pi}{4}\right) \right) - (Mv_1 + Mv_2) \right\}^2 \\ + \left\{ \sqrt{\pi} \left( \cos\left(v_1^2 + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(v_2^2 + \frac{\pi}{4}\right) \right) - (Nv_1 + Nv_2) \right\}^2$$

oder in entwickelter Form:

$$(5) \left\{ \begin{aligned} J &= 4\pi \cdot \cos^2\left(\frac{v_1^2 - v_2^2}{2}\right) + (Mv_1 + Mv_2)^2 + (Nv_1 + Nv_2)^2 \\ &\quad - 4\sqrt{\pi}(Mv_1 + Mv_2) \cdot \cos\left(\frac{v_1^2 - v_2^2}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{v_1^2 + v_2^2}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \\ &\quad - 4\sqrt{\pi}(Nv_1 + Nv_2) \cdot \cos\left(\frac{v_1^2 - v_2^2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{v_1^2 + v_2^2}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned} \right.$$

und nach (4) zur Bestimmung der Lage der Maxima und Minima:

$$(6) \quad \frac{\sqrt{\pi} \cdot \sin\left(v_1^2 + \frac{\pi}{4}\right) - Mv_1}{\sqrt{\pi} \cdot \sin\left(v_2^2 + \frac{\pi}{4}\right) - Mv_2} = \frac{\sqrt{\pi} \cdot \cos\left(v_1^2 + \frac{\pi}{4}\right) - Nv_1}{\sqrt{\pi} \cdot \cos\left(v_2^2 + \frac{\pi}{4}\right) - Nv_2}$$

Die dieser Gleichung genügenden Werthe von  $x_0$  lassen sich natürlich nur auf indirectem Wege durch successive Näherungen ermitteln; wenn jedoch Tafeln der Functionen  $Mv$  und  $Nv$  zu Gebote stehen, so wird man selbst in ungünstigen Fällen die Lage der Maxima und Minima noch bis in die Nähe der Grenzebenen ohne grosse Schwierigkeit verfolgen können. Einfacher wird die Lösung, wenn man

von den Maximis und Minimis in der Nähe der Grenzebene absieht; dann wird man nämlich in den meisten Fällen  $Mv_i$  ganz vernachlässigen und  $Nv_i = 1/2v_i$  setzen können, und es ist von Interesse, diesen Fall hier noch weiter zu untersuchen.

Der Intensitätsausdruck (5) und die Gleichung (6) nehmen alsdann folgende Form an:

$$(7) \left\{ \begin{aligned} J &= 4\pi \cdot \cos^2\left(\frac{v_1^2 - v_2^2}{2}\right) \\ &- 2\sqrt{\pi} \cdot \left(\frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2}\right) \cdot \cos\left(\frac{v_1^2 - v_2^2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{v_1^2 + v_2^2}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2}\right)^2 \cdot \end{aligned} \right.$$

$$(8) \left\{ \begin{aligned} &\sin\left(\frac{v_1^2 - v_2^2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{v_1^2 + v_2^2}{2}\right) \\ &- \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \cdot \frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2} \cdot \sin\left(\frac{v_1^2 - v_2^2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{v_1^2 + v_2^2}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \\ &- \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \cdot \frac{v_1 - v_2}{v_1 v_2} \cdot \cos\left(\frac{v_1^2 - v_2^2}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{v_1^2 + v_2^2}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0, \end{aligned} \right.$$

und die letztere Gleichung lässt sich in zwei Factoren zerfällen, wenn man die numerisch jedenfalls sehr kleine Quantität  $(1/16\pi) \cdot (1/v_1^2 - 1/v_2^2)$  ebenfalls vernachlässigt. Damit gelangt man zu den beiden Gleichungen:

$$(9) \left\{ \begin{aligned} &\cos \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \cdot \frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2} \cdot \cos\left(\frac{v_1^2 + v_2^2}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \\ &\sin \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \cdot \frac{v_1 - v_2}{v_1 v_2} \cdot \sin\left(\frac{v_1^2 + v_2^2}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned} \right\}, \quad v_i = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda} \frac{q_0 q_i}{q_0 + q_i}} \cdot \left( \frac{x}{q} + (-1)^{i-1} \cdot \frac{x_0}{q_0} \right),$$

von denen die erstere die Lage der Minima, die zweite die Lage der Maxima bestimmt, wie sogleich aus (7) ersichtlich. Die rechten Seiten dieser Gleichungen müssen den gemachten Voraussetzungen zufolge kleine Grössen sein. Bezeichnet man daher mit  $\xi_0^{(n)}$  die Wurzeln der Gleichungen  $\cos \frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2) = 0$ , resp.  $\sin \frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2) = 0$ , welche als erste Näherungswerthe von (9) zu betrachten sind, ferner mit  $A_n$  und  $B_n$  die mit  $\xi_0^{(n)}$  berechneten Werthe der rechten Seiten und mit  $x_0^{(n)}$  die



zweiten Näherungswerthe von (9), so hat man, da  $\frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2) = 2\pi x x_0 / (\lambda(\varrho_0 + \varrho))$  ist:

$$\text{für die Mi-} \left\{ \begin{array}{l} \xi_0^{(n)} = \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{\lambda \cdot (\varrho_0 + \varrho)}{2x} \\ x_0^{(n)} = \xi_0^{(n)} + (-1)^n \cdot \frac{\lambda(\varrho_0 + \varrho)}{2\pi x} \cdot A_n \end{array} \right\} n = 1, 2, 3 \dots$$

$$\text{für die Ma-} \left\{ \begin{array}{l} \xi_0^{(n)} = n \cdot \frac{\lambda(\varrho_0 + \varrho)}{2x} \\ x_0^{(n)} = \xi_0^{(n)} + (-1)^{(n)} \cdot \frac{\lambda(\varrho_0 + \varrho)}{2\pi x} \cdot B_n \end{array} \right\} n = 0, 1, 2 \dots$$

Bezeichnen wir ferner mit  $q_0$  die von Prof. Weber sogenannte ideale Fransenbreite, d. h. den Abstand zweier aufeinanderfolgender Minima, resp. Maxima, im Fall keine Beugung vorhanden wäre, und entsprechend mit  $f_0, f_1, f_2$  etc. die wirklichen Abstände zweier aufeinanderfolgender Minima, resp. Maxima, anfangend von der Mittelebene, so erhalten wir:

$$q_0 = \frac{\lambda \cdot (\varrho_0 + \varrho)}{2x}$$

und daher für die Minima:

$$(10) \left\{ \begin{array}{l} f_0 = q_0 - \frac{2A_1}{\pi} \cdot q_0 \quad (\text{Mittelfranse}) \\ f_n = q_0 - (-1)^n \cdot \frac{A_n + A_{n+1}}{\pi} \cdot q_0 \quad (n^{\text{te}} \text{ Seitenfranse}) \end{array} \right.$$

und für die Maxima:

$$(11) \left\{ \begin{array}{l} f_1 = q_0 - \frac{B_1}{\pi} \cdot q_0 \\ f_n = q_0 - (-1)^{n-1} \cdot \frac{B_{n-1} + B_n}{\pi} \cdot q_0 \end{array} \right.$$

Substituiren wir endlich  $\cos \frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2) = A_n$ , resp.  $\sin \frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2) = B_n$  in den für  $J$  gefundenen Ausdruck (7), so erhalten wir für die Intensität des in der  $n^{\text{ten}}$  Franse liegenden Maximums:

$$(12) \quad J_n = 4\pi \cdot (1 - (-1)^n (A_n + A_{n+1})) + \frac{1}{4} \left( \frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2} \right)^2$$

und für die Intensität der Minima:

$$(13) \quad J = \frac{1}{4} \left( \frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2} \right)^2 \cdot \sin^2 \left( \frac{v_1^2 + v_2^2}{2} + \frac{\pi}{4} \right).$$

Die Formeln (10) bis (13) enthalten alle von Prof. Weber aufgestellten Sätze über die Oscillation der Fransenbreiten und Helligkeiten. Aus (10) und (11) folgt zunächst, dass die

Abstände der Minima sowohl als der Maxima um den Mittelwerth  $\varphi_0$  oscilliren, und zwar sind die Schwankungen in den Abständen der Minima bedeutender, weil  $A_n$  grössere Werthe als  $B_n$  annehmen kann. Ebenso folgt aus (12) und (13), dass die Oscillationen in den Helligkeiten der Maxima, als Grössen erster Ordnung, grösser sind, als diejenigen der Minima, die nur von der zweiten Ordnung sind. Da ferner der Bogen  $\frac{1}{2}(v_1^2 + v_2^2)$  sich in der Nähe der Mittelebene nur langsam ändert, so müssen in der Mitte des Interferenzraumes die schmalen und breiten, hellen und dunkeln Fransen sich abwechseln. Endlich folgt aus der Vergleichung von (10) und (12), dass die breiteren Fransen zugleich die stärkeren und die schmälere die schwächeren Maxima besitzen. Auch lässt sich ohne Schwierigkeit nachweisen, dass die mittlere Helligkeit der breiteren Fransen eine grössere sein muss.

Um sich eine Vorstellung von der Grösse der Schwankungen, um die es sich hier handelt, zu machen, mögen noch für einen bestimmten Fall die numerischen Beträge derselben angegeben werden. Wir wollen deshalb mit  $a$  und  $b$  die grösstmöglichen Abweichungen der Breite und des Maximums der Mittelfranse von der idealen Breite und der idealen Helligkeit, ausgedrückt in Procenten dieser letzteren, bezeichnen; dann ist:

$$a = \frac{100}{\pi \cdot \sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{v} = \frac{100}{\pi^2} \cdot \frac{\sqrt{\lambda \cdot \frac{\varphi}{\varphi_0} (\varphi_0 + \varphi)}}{x}, \quad b = a \cdot \pi$$

Nehmen wir nun die Entfernung der virtuellen Lichtpunkte von einander zu  $2x = 4,5$  mm, die Entfernung derselben von der beugenden Kante zu  $\varphi = 1$  m und die Wellenlänge zu  $\lambda = 0,0006$  mm an, so erhalten wir:

für $\varphi_0 =$	$a$	$b$
200 mm	8,5	26,8
600 „	5,7	17,9
1000 „	4,9	15,5
2000 „	4,3	13,4
$\infty$ „	3,5	11,0

Mit zunehmender Entfernung der Mittelfranse von der beugenden Kante, nehmen also die Abweichungen  $a$  und  $b$  langsam ab; aber selbst für sehr grosse Entfernungen  $\varphi_0$

kann unter den obwaltenden Umständen die Breite der Mittelfranse noch um 3,5 Proc. von ihrer idealen Breite  $q_0$  nach beiden Seiten hin abweichen, und die Helligkeit ihres Maximums sogar um 11 Proc. von ihrer idealen Helligkeit. Unter ähnlichen Verhältnissen, wie den obigen, müssen demnach die Unterschiede in der Breite und Helligkeit der mittleren Fransen, welche das Doppelte von  $a$  und  $b$  betragen können, scharf ausgeprägt erscheinen, um so mehr, als die breiteren Fransen zugleich eine grössere Helligkeit besitzen, und die die breiteren und schmäleren Fransen sich abwechseln.

In ganz ähnlicher Weise, wie es hier geschehen ist, lässt sich, von dem in (2) gegebenen Ausdruck für  $J$  ausgehend, auch der allgemeinere Fall behandeln, wenn die virtuellen Lichtpunkte verschiedene Abstände von der beugenden Kante haben, und  $c$  von 0 verschieden ist, nur dass die Formeln sich dann naturgemäss mehr compliciren. Ich will deshalb die Rechnung hier nicht durchführen, sondern kurz die Resultate derselben angeben.

Nimmt man zunächst wieder  $c = 0$  an und setzt  $\beta = (\pi/\lambda)(\rho_1 - \rho_2)$ , wo  $2\beta$  demnach die Phasendifferenz der in der beugenden Kante zusammentreffenden Schwingungen bedeutet, ferner zur Abkürzung:  $\alpha = \frac{1}{4}(v_1^2 + v_2^2) + \frac{1}{4}\pi$  und  $\gamma = \frac{1}{4}(v_1^2 - v_2^2) - \beta$ , so erhält man unter denselben Voraussetzungen, die oben gemacht sind, für Punkte, welche innerhalb des Interferenzraumes liegen:

$$(14) \quad \left\{ J = 4\pi \cos^2 \gamma - 2\sqrt{\pi} \left( \frac{1}{v_1} \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{v_2} \cos(\alpha - \beta) \right) \cdot \cos \gamma \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \left( \frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2} \right)^2 - \frac{\sin^2 \beta}{v_1 v_2} \right.$$

und zur Bestimmung der Lage der Maxima und Minima, die Gleichungen:

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} \cos \gamma &= \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{v_1} \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{v_2} \cos(\alpha - \beta) \right) \text{ für die Minima,} \\ \sin \gamma &= \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left( -\frac{1}{v_1} \sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{v_2} \sin(\alpha - \beta) + \frac{4 \cos \alpha \sin \beta}{v_1 + v_2} \right) \text{ für die Ma-} \\ &\quad \text{xima.} \end{aligned} \right.$$

Für  $\beta = 0$  oder  $= n \cdot \pi$  ergeben sich daraus wieder die Gleichungen (9); für  $\beta = \frac{1}{2}(2n + 1)\pi$  ergibt sich dagegen:

$$\sin \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \cdot \frac{v_1 - v_2}{v_1 v_2} \cdot \sin \left( \frac{v_1^2 + v_2^2}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \text{ für die Minima,}$$

$$\cos \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \cdot \frac{(v_1 - v_2)^2}{v_1 v_2 \cdot (v_1 + v_2)} \cdot \cos \left( \frac{v_1^2 + v_2^2}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \text{ für die Maxima}$$

und für die Helligkeiten der Maxima, bis auf kleine Grössen zweiter Ordnung genau:

$$J_n = 4\pi - (-1)^n 2\sqrt{\pi} \frac{v_1 - v_2}{v_1 v_2} \cdot \sin \left( \frac{v_1^2 + v_2^2}{2} + \frac{\pi}{4} \right).$$

Es folgt hieraus das bemerkenswerthe Resultat, dass die Oscillationen in den Abständen der Minima und Maxima, sowie die Intensitätsschwankungen, sehr wesentlich durch die Phasendifferenz  $2\beta$  bedingt werden. Sie sind am grössten, wenn die Schwingungen mit gleicher Phase, und am kleinsten, wenn dieselben mit entgegengesetzter Phase in der beugenden Kante zusammentreffen, und zwar stehen die Schwankungen im ersteren Fall zu den Schwankungen im letzteren Fall in dem Verhältniss von  $v_1 + v_2$  zu  $v_1 - v_2$ . Die Lage der Maxima ist ferner für  $\beta = n\pi$  genau dieselbe, wie die Lage der Minima für  $\beta = \frac{1}{2}(2n+1)\pi$ ; im ersteren Fall liegt in der Mittelebene stets ein Maximum und folglich im zweiten Fall stets ein Minimum.

Zwischen der Phasendifferenz  $2\beta$ , dem mittleren Einfallswinkel der Strahlen auf den Doppelspiegel  $i$  und der Grösse  $e$ , um welche der eine Spiegel gegen den anderen in der gemeinschaftlichen oder beugenden Kante zurücksteht, besteht die einfache Relation:

$$\beta = \frac{\pi}{\lambda} (e_1 - e_2) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot e \cdot \cos i.$$

Besitzt demnach  $e$  eine im Vergleich zu  $\lambda$  erhebliche Grösse, so wird man durch Aenderung des Einfallswinkels, z. B. durch eine Drehung des Spiegels um die gemeinschaftliche Kante, es bewirken können, dass  $\beta$  abwechselnd die Werthe  $n\pi$  und  $\frac{1}{2}(2n+1)\pi$  annimmt, und demgemäss müssen sich die mittleren Fransen bald sehr verschieden in Breite und Helligkeit, bald nahezu gleich in ihrem Aussehen erweisen.

Ist schliesslich der Abstand  $c$  der aneinandergrenzenden Spiegelkanten eine gegen  $\lambda$  nicht zu vernachlässigende Grösse, aber immerhin klein gegen die Entfernung  $2x$  der virtuellen

Lichtp  
durch  
(15) an  
Winke  
schlies  
der La  
Gleich

(16)

und m  
der be  
Franse  
Oscilla

In  
genaue  
messun  
schied  
ergebe  
tisch  
unten  
erhalt  
forder  
zusch

U  
Lichtl  
Fällen  
durch  
und d  
farber  
sich e  
fernun  
mit g

Ann.

Lichtpunkte von einander, so lässt sich dessen Einfluss dadurch berücksichtigen, dass man in den Formeln (14) und (15) an Stelle von  $\alpha$ :  $\alpha - \pi/\lambda \cdot \varepsilon \cdot c \cdot \cos i$  setzt, wo  $\varepsilon = x/\varrho$  den Winkel bedeutet, den die Spiegelebenen mit einander einschliessen. Insbesondere erhält man daher zur Bestimmung der Lage der Minima innerhalb des Interferenzraumes die Gleichungen:

$$(16) \quad \begin{cases} \cos \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \cdot \frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2} \cdot \cos \left( \frac{v_1^2 + v_2^2}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{\lambda} \varepsilon \cdot c \cdot \cos i \right) \\ \quad \text{für } \beta = n \cdot \pi, \\ \sin \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \cdot \frac{v_1 - v_2}{v_1 v_2} \cdot \sin \left( \frac{v_1^2 + v_2^2}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{\lambda} \varepsilon \cdot c \cdot \cos i \right) \\ \quad \text{für } \beta = \frac{2n+1}{2} \pi, \end{cases}$$

und man kann dieselben dahin deuten, dass eine kleine Breite der beugenden Kante auf die Grösse der Oscillationen der Fransenbreiten gar keinen Einfluss ausübt, sondern nur die Oscillationsphase verändert.

In der Absicht, die im Obigen entwickelte Theorie einer genaueren Prüfung zu unterziehen, habe ich Mikrometermessungen über die Lage der Intensitätsminima an verschiedenen Interferenzbildern ausgeführt und die daraus sich ergebenden Werthe für die Fransenbreiten mit den theoretisch berechneten Werthen derselben verglichen. Weiter unten gebe ich eine Zusammenstellung der auf solche Weise erhaltenen Resultate, zu deren Verständniss es jedoch erforderlich ist, eine kurze Beschreibung der Messungen voranzuschicken.

Um eine intensive, homogene und möglichst schmale Lichtlinie zu erhalten, bediente ich mich in den meisten Fällen des Sonnenlichts, welches mittelst eines Heliostaten durch einen verticalen Spalt in ein dunkles Zimmer geworfen und durch ein starkes Dispersionsprisma in seine Spectralfarben zerlegt wurde. Gleich hinter dem Prisma befand sich eine achromatische Sammellinse, die in geeigneter Entfernung ein Spectrum entwarf, in welchem die Hauptlinien mit grosser Schärfe zu sehen waren. In der Ebene dieses

Spectrums war ein Schirm mit einem sehr feinen, leicht regulirbaren Spalt aufgestellt, welcher durch passende Vorrichtungen mit einer bestimmten Spectrallinie in genaue Coincidenz gebracht werden konnte.

Auf diese Weise erhielt ich eine verticale Lichtlinie von circa 2 cm Länge, deren Breite auf wenige Hundertstel Millimeter reducirt werden konnte, und deren Wellenlänge sich mit einer Genauigkeit von 1 bis 2 Einheiten der sechsten Decimale angeben liess. Von der Intensität dieser Lichtlinie kann man sich daraus eine Vorstellung machen, dass die Interferenzstreifen noch bei intensivem Tageslichte mit einem Mikroskop von 90maliger Vergrösserung gut zu sehen waren, und dass dieselben im Dunkeln noch scharf gemessen werden konnten, wenn das Licht durch zwei Heliostate in das dunkle Zimmer geworfen wurde, wie es des Nachmittags infolge des Sonnenstandes erforderlich war.

Um ferner den von der Lichtlinie ausgehenden Strahlen eine grössere Divergenz zu verleihen, war an dem Heliostaten eine Cylinderlinse von kurzer Brennweite angebracht, in deren Brennpunkt sich der erste schmale Spalt befand. Die durch diesen Spalt gehenden Strahlen beschienen infolge dessen das ganze Dispersionsprisma, wodurch erreicht wurde, dass das von der Lichtlinie ausgehende Strahlenbündel in einer Entfernung von einem Meter eine Breite von ungefähr 20 mm besass. Ausserdem war noch gleich hinter der Sammellinse ein Reflexionsprisma in den Weg der Lichtstrahlen eingeschaltet, welches ermöglichte, den Strahlen eine solche Richtung zu geben, dass der Interferenz- und Messapparat eine solide Unterlage auf einem Steinpfeiler erhalten konnten.

Der von mir benutzte Interferenzspiegel war aus zwei quadratischen Glasspiegeln von 55 mm Länge und Breite und 7 mm Dicke zusammengesetzt, welche aus der optischen Werkstatt von Steinheil bezogen waren, und von deren vollkommenen Planheit ich mich überzeugt hatte. An den Kanten waren die Spiegel ein wenig schräg abgestumpft, und es war daher nicht möglich, die Spiegelfränder in vollkommene Berührung mit einander zu bringen. Wie indess oben

gezeigt  
leicht  
Gewich  
der K  
sind u  
teren,  
Oelfar  
bracht  
pelspie  
verhüt  
einge  
Spiege  
einer  
Klam  
diese  
spiral  
genau  
schen  
die P  
zu de  
gegen  
gegen  
schaf  
Bezie  
kein  
wahr  
ebene  
nach  
inden  
succe  
Collin  
liche  
stellu  
wiche  
Mess  
gema  
von  
des

gezeigt wurde, lässt sich dieser Umstand bei der Rechnung leicht berücksichtigen und fällt jedenfalls viel weniger ins Gewicht, als mögliche Unebenheiten der Spiegel in der Nähe der Kante, welche durch die Art des Schleifens bedingt sind und wohl nie ganz zu vermeiden sein werden. Die hinteren, matt geschliffenen Flächen der Spiegel wurden mit Oelfarbe geschwärzt und die Spiegel in eine Fassung gebracht, welche im Princip dieselbe war, wie sie meist bei Doppelspiegeln angewandt wird. Um etwaige Durchbiegungen zu verhüten, waren die Spiegel in Rahmen von Eisenblech eingekittet, welche nur an der Seite offen waren, wo die Spiegel aneinander grenzten. Der eine Rahmen war auf einer Korkunterlage an einer dicken eisernen Platte durch Klammern befestigt, während der andere auf drei durch diese Platte gehenden Stellschrauben ruhte und durch Stahlschrauben gegen diese Schrauben fest angezogen wurde. Die genaue Justirung des Apparats wurde an einem Starke'schen Goniometer ausgeführt, wobei die grösste Sorgfalt auf die Parallelstellung der Durchschnittslinie der Spiegelebenen zu den verticalen Kanten der Spiegel verwendet wurde. Dagegen war es von geringerem Belang, ob der eine Spiegel gegen den anderen um eine kleine Grösse  $e$  in der gemeinschaftlichen Kante zurückstand, und es genügte in dieser Beziehung vollkommen, wenn durch Befühlen mit der Hand kein Vorspringen der einen Spiegelkante vor der anderen wahrgenommen werden konnte. Die Neigung der Spiegelebenen wurde an demselben Goniometer, sowohl vor als nach einer Messungsreihe der Interferenzstreifen, bestimmt, indem das im Beobachtungsfernrohr befindliche Andreaskreuz successive auf die beiden Bilder der verticalen Axe des Collimatoraxenkreuzes eingestellt wurde. Der wahrscheinliche Fehler einer solchen Bestimmung, aus mehreren Einstellungen, betrug im Mittel nur  $0,7''$ ; nichtsdestoweniger wichen die Mittel der vor und nach einer vollständigen Messungsreihe (die ungefähr 4 Stunden in Anspruch nahm) gemachten Bestimmungen oft um sehr erhebliche Quantitäten von einander ab, was grösstentheils den Unvollkommenheiten des Apparats zuzuschreiben war. Mehrere mal gingen die



Änderungen bis auf 25", und in solchen Fällen blieb mir nichts anderes übrig, als die Messungsreihe zu verwerfen; in anderen Fällen, wo die Unterschiede der beiden Bestimmungen nur zwischen 3" und 10" schwankten, wurde als definitiver Winkelwerth das Mittel aus beiden Bestimmungen angesehen.

Die Entfernung der Ränder der Spiegel an der gemeinschaftlichen Kante wurde mit einem Fadenmikrometer zu  $c = 0,85$  mm bestimmt.

Zur Erzeugung und Messung der Interferenzstreifen hatte ich mir eine Art von Diffractionsbank in folgender einfachen Weise hergestellt. Auf einem steinernen Pfeiler wurden zwei starke Holzstative nebeneinander gestellt und durch ein plan und glatt gehobeltes Brett, von etwas über 1 m Länge, das horizontal auf dieselben gelegt wurde, mittelst Schraubstöcken fest miteinander verbunden. An dem zur leuchtenden Linie gewandten Ende des Brettes, in etwa 1 m Entfernung von der Lichtlinie, befand sich ein Meyerstein'sches Spectrometer, das nur dazu bestimmt war, dem Interferenzapparat eine möglichst solide und zugleich leicht regulirbare Aufstellung zu geben und den Einfallswinkel der Strahlen zu bestimmen. Auf demselben Brett wurde in geeigneten Abständen der Messapparat aufgestellt. Als solchen benutzte ich ein Mikroskop von 45maliger Vergrößerung, welches zur Ablesung des Verticalkreises eines Theodoliten gehörte und mit einem Fadenmikrometer versehen war. Der festeren und bequemerer Aufstellung halber wurde das Mikroskop in seiner Fassung am Theodoliten belassen, nachdem der Verticalkreis und alle anderen unnöthigen Theile des Instrumentes entfernt waren.

Den Trommelwerth der Mikrometerschraube bestimmte ich zu wiederholten malen aus Messungen an einem fein getheilten Glasmikrometer, und es ergab sich im Mittel:

1 Trommeltheil =  $1'' = 0,002784$  mm  
mit einem wahrscheinlichen Fehler von 0,000004.

Die periodischen und zufälligen Fehler der Schraube waren so gering, dass sie vernachlässigt werden konnten.

Nachdem die Neigung der Spiegelebenen bestimmt worden war, wurde der Interferenzspiegel auf das Tischchen des

Spectro  
dass di  
Kante  
fallswir  
die Br  
Minim  
eine B  
stattfin  
central  
A  
Neigung  
Interfe  
indess  
zureich  
ferenz  
und in  
Helios  
beeint  
sungen  
U  
einzus  
lichen  
Helios  
den S  
Horiz  
ferenz  
ebene  
schieß  
parall  
tende  
auf e  
nen V  
eine  
L  
zugle  
seitig  
Licht  
nur



Spectrometers aufgesetzt und in eine solche Lage gebracht, dass die Spiegel voll beschienen wurden, und die beugende Kante nahezu parallel der leuchtenden Linie war. Den Einfallswinkel  $i$  wählte ich meist zwischen  $80$  und  $85^\circ$ , sodass die Breite der reflectirten Strahlenbündel beim Spiegel im Minimum  $b = 55 \text{ mm} \cdot \cos(85^\circ)$  gleich  $5 \text{ mm}$  ungefähr betrug, eine Breite, bei welcher die an den äusseren Spiegelrändern stattfindende Beugung keinen merklichen Einfluss auf die centralen Fransen ausüben konnte.

An den Stellschrauben des Tischchens wurde dann die Neigung des Interferenzspiegels so lange berichtigt, bis die Interferenzstreifen im Mikroskop scharf zu sehen waren; indess erwies sich in der Folge diese Berichtigung als unzureichend. Es zeigte sich nämlich öfters, dass die Interferenzstreifen sich während der Messung allmählich parallel und immer nach derselben Richtung verschoben, wenn der Heliostat unverändert gelassen wurde, und dieser Umstand beeinträchtigte in hohem Grade die Genauigkeit der Messungen.

Um den Grund dieser etwas auffälligen Erscheinung einzusehen, muss man beachten, dass durch den veränderlichen Sonnenstand bei ungeändert gelassener Stellung des Heliostaten die Richtung der von der Lichtlinie ausgehenden Strahlen sich während der Messung ein wenig gegen die Horizontale änderte. Infolge dessen mussten aber die Interferenzstreifen sich in einer zur Durchschnittslinie der Spiegel-ebenen (resp. zur beugenden Kante) parallelen Richtung verschieben und gleichzeitig stets der leuchtenden Linie selbst parallel bleiben. Falls demnach beugende Kante und leuchtende Linie (oder vielmehr die Projectionen dieser Linien auf eine zur Strahlenrichtung senkrechte Ebene) einen kleinen Winkel miteinander bildeten, musste nothwendigerweise eine seitliche Verschiebung aller Streifen eintreten.

Mit der Erklärung dieser störenden Erscheinung war zugleich das Mittel an die Hand gegeben, dieselbe zu beseitigen und die beugende Spiegelkante sehr genau der Lichtlinie parallel zu stellen. Man brauchte zu dem Zweck nur das Mikroskop in einer grösseren Entfernung von dem

Spiegel aufzustellen, wo die betreffenden Verschiebungen natürlich um so grösser waren, und den Heliostaten so zu bewegen, dass die Höhenrichtung der Strahlen sich änderte. Durch allmähliches Neigen der Spiegelkante mittelst der Stellschrauben am Tischchen konnte dann die Verschiebung zum Verschwinden gebracht werden.

Änderte man nur die Horizontalrichtung der Strahlen durch Drehung des Heliostaten, so war gar keine Verschiebung der Streifen wahrzunehmen; in diesem Falle wurde nur die Wellenlänge der Lichtlinie um eine ganz unmerkliche Quantität geändert.

Die Höhe und Neigung des Mikroskops wurden derart berichtigt, dass bei allen Stellungen desselben auf dem Brette stets die Mitte der Interferenzstreifen im Gesichtsfelde war. Darauf wurde das Mikroskop in eine Entfernung von etwa 20 cm an den Spiegel herangerückt, um die Mitte des Interferenzbildes scharf ins Auge fassen zu können. Es zeigte sich dann für gewöhnlich, dass das Interferenzbild unsymmetrisch war, und dass in der Mitte desselben sich weder ein Maximum noch ein Minimum befand. Veränderte man nun durch mikrometrische Bewegung am Horizontalkreise des Spectrometers den Einfallswinkel der Lichtstrahlen, indem man gleichzeitig mit dem Mikroskop stets die Mitte des Interferenzbildes im Auge behielt, so nahm man eine allmähliche Verrückung der Interferenzstreifen gegen diese Mitte wahr. Es kamen dadurch abwechselnd bald Maxima, bald Minima in die Mitte des Bildes, und sobald das erstere der Fall war, zeigten sich die centralen Fransen im allgemeinen sehr verschieden in Helligkeit und Breite, sobald dagegen das letztere eintrat, waren sie nahezu gleich, in vollkommener Uebereinstimmung mit dem oben ausgesprochenen Satz.

Aus der Grösse des Einfallswinkels  $i$  und der Änderung  $di$ , die erforderlich war, um ein Maximum, resp. Minimum durch das nächstfolgende höherer oder niederer Ordnung zu ersetzen, liess sich angenähert die Grösse  $e$ , um welche der eine Spiegel gegen den anderen in der beugenden Kante zurückstand, sowie die Ordnungszahl der Mittelfranse be-

rechne  
zeigen  
in die  
mögen  
angefü  
genäh  
lesen.

E  
S

Erstes  
Zweites  
Drittes  
Viertes

$\lambda =$

$e =$

A

$\beta$

(wo  
Abst  
beuge

Mini  
Mini  
sich  
nen

noch  
eine  
word

mun  
Inte

rechnen. Um hierfür ein Beispiel zu geben und zugleich zu zeigen, mit welcher Genauigkeit ein Maximum, resp. Minimum in die Mitte des Interferenzbildes gebracht werden konnte, mögen zwei an verschiedenen Tagen gemachte Bestimmungen angeführt werden; die Einfallswinkel wurden hierbei nur angenähert an dem Horizontalkreise des Spectrometers abgelesen.

Es ergab sich:

Sept. 30.			Oct. 1.		
	$90^\circ - i$	$di$		$90^\circ - i$	$di$
Erstes Min.	$7,4^\circ$	$0,8^\circ$	Erstes Min.	$7,8^\circ$	$0,95^\circ$
Zweites Min.	$8,2$		Zweites Min.	$8,75$	
Drittes Min.	$8,9$		Drittes Min.	$10,0$	
Viertes Min.	$9,8$		Viertes Min.	$11,15$	
	$\lambda = 0,589 \text{ mm}$			$\lambda = 0,589 \text{ mm}$	
	$\varepsilon = 9,0'$			$\varepsilon = 8,95'$	

Aus diesen Daten erhält man mittelst der Formeln:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} e \cdot \cos i = \left\{ \begin{array}{l} n \cdot \pi \text{ für die Maxima} \\ \frac{2n-1}{2} \pi \text{ für die Minima} \end{array} \right\} \text{ und } r = \frac{e}{\varepsilon}$$

(wo  $\varepsilon$  den Winkel zwischen den Spiegelebenen, und  $r$  den Abstand der Durchschnittslinie der Spiegelebenen von der beugenden Kante bedeutet) im Mittel:

für 30. Sept.:

$$e = 0,0213 \text{ mm}$$

$$r = 8,14 \text{ mm}$$

für 1. Oct.:

$$e = 0,0152 \text{ mm}$$

$$r = 5,85 \text{ mm}$$

Ferner ergibt sich, dass die Ordnungszahl des ersten Minimums Sept. 30: 10, und die Ordnungszahl des ersten Minimums und Maximums Oct. 1: 7 oder 8 war; es versteht sich indess von selbst, dass die letzteren Bestimmungen keinen grossen Anspruch auf Genauigkeit machen können.

In der Regel war  $di$  sehr viel grösser, und demnach  $\varepsilon$  noch kleiner, wie es hier angegeben ist, wo absichtlich der eine Spiegel gegen den anderen ein wenig zurückgestellt worden war.

Für die Messungen der Fransenbreiten wurde ein Maximum oder Minimum so genau als möglich in die Mitte des Interferenzbildes gebracht und dieselben dann in der Weise

ausgeführt, dass bei verschiedenen Abständen des Mikroskops von dem Spiegel die Breiten der mittleren Fransen durch Einstellung des Mikrometerfadens auf die Minima bestimmt wurden. Die Zahl der gemessenen Fransen hing natürlich von der Zahl der überhaupt vorhandenen ab; in den meisten Fällen habe ich bei  $\varrho_0 > 15$  cm nur auf 4, resp. 5 Streifen, bei  $\varrho_0 > 15$  cm und  $< 30$  cm auf 6, resp. 7, und bei  $\varrho_0 > 30$  cm auf 8, resp. 9, mitunter auch auf mehr Streifen eingestellt. Die Entfernung  $\varrho$  variirte bei meinen Messungen zwischen 90 cm und 110 cm, und der Abstand der virtuellen Lichtpunkte  $2x$  zwischen 5,3 mm und 7,2 mm; unter solchen Umständen erwies sich die Annäherung  $Mv_1 = Mv_2 = 0$ ,  $Nv_1 = 1/2 v_1$ ,  $Nv_2 = 1/2 v_2$  noch als ausreichend.

Um die Lage der gemessenen Fransen gegen die Mitte des Bildes angeben zu können, wurden die ersten Messungen jedesmal bei kleinen  $\varrho_0$  ausgeführt, wo die Mittelfranse mit Sicherheit erkannt werden konnte, und dann durch allmähliches langsames Fortrücken des Mikroskops zu grösseren  $\varrho_0$  fortgeschritten, indem dabei die Mittelfranse stets im Auge behalten wurde. Uebrigens war die Erscheinung, wenn ein Maximum sich in der Mitte des Interferenzbildes befand, im allgemeinen so scharf ausgeprägt, dass noch bei  $\varrho_0 = 60$  cm mit ziemlicher Sicherheit aus der Symmetrie auf die Mittelfranse geschlossen werden konnte; war dagegen ein Minimum in der Mitte, so liess sich der mittlere Streifen nicht mehr angeben, sobald  $\varrho_0 > 30$  cm war.

Die Abstände des Mikroskops von dem Spiegel wurden meistens so gewählt, dass die mittleren Fransen möglichst ungleich erschienen. Ihre Grösse mass ich mit einem Maassstab bis auf 1—2 mm genau; mit derselben Genauigkeit wurde die Entfernung  $\varrho$  der Spiegelkante von der leuchtenden Linie bestimmt.

Die Einstellungen wurden immer bei unveränderter Stellung des Heliostaten gemacht, indem der Mikrometerfaden successive mit allen zu bestimmenden Minimis in Coincidenz gebracht wurde. Erwies es sich als nothwendig, den Heliostaten in der Zwischenzeit zu bewegen, so wurde nochmals auf den Streifen eingestellt, der zuletzt beobachtet war, um

noch e  
ferenzb  
Grund  
Schrau  
zweima  
Richtu

D  
Franse  
sungen  
wahrsc  
jeder  
kleine  
grenzt

V  
sonder  
Mikro  
Licht  
einen  
messe  
ander  
erreic  
anges  
wurde  
Oculu  
im M

1  
durch  
tate,  
Die  
Fran  
im a  
wurd  
zu C  
und  
ten

gedr

noch etwa übrig gebliebene kleine Verschiebungen des Interferenzbildes dadurch unschädlich zu machen. Aus demselben Grunde wurde immer in beiden Drehungsrichtungen der Schraube gemessen, und zwar für gewöhnlich bei jedem  $\varphi_0$  zweimal in der einen und zweimal in der entgegengesetzten Richtung.

Den wahrscheinlichen Fehler einer einmal gemessenen Fransenbreite habe ich aus einer grösseren Zahl von Messungen zu  $0,5''$  oder  $0,0014$  mm abgeleitet, demzufolge der wahrscheinliche Fehler des Mittels aus zwei Messungen in jeder Richtung ungefähr  $0,0007$  mm betrug. Er war etwas kleiner bei kleineren  $\varphi_0$ , wo die Minima sich schärfer begrenzt zeigten.

Vor Beginn einer jeden Messungsreihe musste noch besonders darauf geachtet werden, dass die optische Axe des Mikroskops mit der mittleren Richtung der reflectirten Lichtstrahlen zusammenfiel, weil anderenfalls die auf der einen Seite der Mittelebene liegenden Fransen grösser gemessen wurden als die correspondirenden Fransen auf der anderen Seite. Dies liess sich hinreichend genau dadurch erreichen, dass eine Lupe an das Ocular des Mikroskops angesetzt und das Mikroskop so lange im Azimuth gedreht wurde, bis die Mitte des Interferenzbildes mit der Mitte des Oculars coincidirte, während gleichzeitig die centrale Franse im Mikroskop in der Mitte des Gesichtsfeldes erschien.

Im Folgenden gebe ich eine Zusammenstellung der durch Beobachtung ( $B$ ) und Rechnung ( $R$ ) erlangten Resultate, nebst allen für die Rechnung erforderlichen Daten. Die beobachteten Werthe sind die Mittel der entsprechenden Fransenbreiten rechts und links von der Mittelebene, die im allgemeinen in befriedigender Uebereinstimmung gemessen wurden. Der Rechnung haben die Formeln (10) und (11) zu Grunde gelegen, in denen im gegenwärtigen Falle  $A_n$  und  $B_n$  die durch Substitution von  $\xi_0^{(n)}$  sich ergebenden rechte Seiten von (16) bedeuten.

Die Fransenbreiten sind überall in Trommeltheilen ausgedrückt:

$$1'' = 0,002784 \text{ mm.}$$

Der Abstand der Spiegelränder blieb während der ganzen Zeit ungeändert:  $c = 0,85$  mm.

Einige mal habe ich die Breiten äusserer Fransen gegen gemessene mehr centrale geschätzt. Für diese Schätzungen ist ihre Abweichung von der Rechnung in Klammern eingefasst und bei den Mittelwerthen nicht berücksichtigt.

Sept. 17. Maximum in der Mitte.  $\beta = n. \pi$ . Linie D.

$$q = 936,5 \text{ mm} \quad \lambda = 0,589 \text{ mm} \quad \varepsilon = 13,10' \quad 90^\circ - i = 4,65^\circ$$

	$q_0 = 158 \text{ mm}$			$q_0 = 207 \text{ mm}$			$q_0 = 279 \text{ mm}$		
	B	R	$\Delta$	B	R	$\Delta$	B	R	$\Delta$
$f_0$	34,1	34,1	0,0	33,1	32,2	+0,9	37,4	37,55	-0,15
$f_1$	31,25	31,05	+0,2	34,5	35,5	-1,0	34,6	34,65	-0,05
$f_2$	32,85	32,7	+0,15	33,2	32,8	+0,4	36,55	36,95	-0,40
$f_3$	—	—	—	$= \frac{f_1 + f_2}{2} = 33,8 \text{ (+0,05)}$			36,0	36,2	-0,20

$q_0 = 345 \text{ mm}$				$q_0 = 421 \text{ mm}$				$q_0 = 528 \text{ mm}$			
	$B$	$R$	$\Delta$		$B$	$R$	$\Delta$		$B$	$R$	$\Delta$
$f_0$	36,8	36,4	+0,4		40,95	41,8	-0,85		42,6	42,05	+0,55
$f_1$	39,05	39,55	-0,5		39,2	38,7	+0,50		44,65	44,7	-0,05
$f_2$	36,7	36,7	0,0		41,7	41,7	0,0		41,9	42,4	-0,50
$f_3$	38,4	38,5	-0,1		37,9	39,3	-1,4		43,95	43,85	+0,10
$f_4 = f_3$	38,8	(-0,4)			$= f_0$	40,1	(+0,85)		$= f_3$	43,95	(0,0)
$q_0 = 632 \text{ mm}$				$q_0 = 732 \text{ mm}$				$q_0 = 837 \text{ mm}$			
	$B$	$R$	$\Delta$		$B$	$R$	$\Delta$		$B$	$R$	$\Delta$
$f_0$	47,3	48,0	-0,7		47,6	47,9	-0,3		52,6	53,5	-0,9
$f_1$	45,55	45,05	+0,5		51,45	51,1	+0,35		51,5	51,55	-0,05
$f_2$	46,7	47,7	-1,0		48,0	47,9	+0,1		53,55	53,9	-0,35
$f_3$	45,95	45,8	+0,15		51,6	50,9	+0,7		51,05	51,05	0,0
$f_4$	$= f_2 \begin{cases} 46,3 & (+0,4) \\ 47,6 & (-0,9) \end{cases}$				$= f_2 \begin{cases} 48,7 & (-0,7) \\ 49,2 & (-1,2) \end{cases}$				—	—	—
$f_5$	—	—	—		$= f_1$	50,8	(+0,65)		—	—	—

Summe der positiven Differenzen  $= \Sigma(+\Delta) = 5,00''$

Summe der negativen Differenzen  $= \Sigma(-\Delta) = 8,50''$

$\Delta$  im Mittel  $= \pm 0,40''$ .

Sept. 19. Maximum in der Mitte.  $\beta = n. \pi$ . Linie D.

$$q = 936,5 \text{ mm} \quad \lambda = 0,590 \text{ mm} \quad \varepsilon = 12,20' \quad 90^\circ - i = 7,35^\circ$$

	$q_0 = 160 \text{ mm}$			$q_0 = 168 \text{ mm}$			$q_0 = 232 \text{ mm}$		
	B	R	$\Delta$	B	R	$\Delta$	B	R	$\Delta$
$f_0$	34,6	35,15	-0,55	35,8	36,2	-0,4	37,0	36,9	+0,1
$f_1$	33,8	34,25	-0,45	33,15	33,85	-0,7	37,95	38,1	-0,15
$f_2$	—	—	—	37,4	37,25	+0,15	35,75	35,6	+0,15
$f_3$	—	—	—	—	—	—	$= f_1 \begin{cases} 38,8 & (-0,85) \\ 37,8 & (+0,15) \end{cases}$		
$f_4$	—	—	—	—	—	—	—	—	—

$f_0$   
 $f_1$   
 $f_2$   
 $f_3$   
 $f_4$

$f_0$   
 $f_1$   
 $f_2$   
 $f_3$   
 $f_4$   
 $f_5$

rauf  
word  
 $\varepsilon = 1$

Se

$f_0$   
 $f_1$   
 $f_2$

$f_0$   
 $f_1$   
 $f_2$   
 $f_3$   
 $f_4$   
 $f_5$

Tag

$\varrho_0 = 322 \text{ mm}$			$\varrho = 445 \text{ mm}$			$\varrho_0 = 533 \text{ mm}$			
$f_0$	$B$	$R$	$\Delta$	$B$	$R$	$\Delta$	$B$	$R$	$\Delta$
$f_0$	41,8	41,3	+0,5	41,6	42,3	-0,7	48,2	48,45	-0,25
$f_1$	38,3	38,8	-0,5	46,45	45,8	+0,65	45,6	45,2	+0,4
$f_2$	41,7	41,85	-0,15	41,9	42,65	-0,75	47,7	48,6	-0,9
$f_3$	—	—	—	44,5	44,6	-0,1	44,6	45,35	-0,75
$f_4$	—	—	—	$=f_1$	45,0	(+1,45)	$=f_0$	47,4	(+0,8)

$\varrho_0 = 649 \text{ mm}$				$\varrho_0 = 833 \text{ mm}$						
	$B$	$R$	$\Delta$	$B$	$R$	$\Delta$				
$f_0$	47,5	49,15	-1,65	57,2	58,25	-1,05	—	—	—	—
$f_1$	52,5	52,1	+0,4	54,5	54,55	-0,05	—	—	—	—
$f_2$	48,85	48,85	0,0	57,55	58,15	-0,6	—	—	—	—
$f_3$	50,75	52,3	-1,55	55,0	55,1	-0,1	—	—	—	—
$f_4$	$>f_2$	49,6		$\frac{f_2+f_3}{2}$	56,75	(-0,5)				
$f_5$	$<f_3$	—	—	$=f_0$	57,4	(-0,2)	—	—	—	—

Summe der positiven Differenzen =  $\Sigma(+\Delta) = 2,35^{\circ}$

Summe der negativen Differenzen =  $\Sigma(-\Delta) = 11,35^{\circ}$

$\Delta$  im Mittel =  $\pm 0,51^{\circ}$ .

Das Ueberwiegen der negativen Differenzen deutet darauf hin, dass entweder  $\lambda$  zu gross oder  $\varepsilon$  zu klein bestimmt worden war. Man braucht  $\varepsilon$  nur um  $2''$  zu ändern, d. h.  $\varepsilon = 12,23'$  anzunehmen, so wird angenähert:

$$\Sigma(+\Delta) = \Sigma(-\Delta).$$

Sept. 22. Maximum in der Mitte.  $\beta = n. \pi$ . Linie F.

$\varrho_0 = 1085 \text{ mm}$      $\lambda = 0,487 \text{ mm}$      $\varepsilon = 8,45'$      $90^\circ - i = 6,85^\circ$

$\varrho_0 = 163 \text{ mm}$			$\varrho_0 = 187 \text{ mm}^1)$			$\varrho_0 = 337 \text{ mm}$		
$B$	$R$	$\Delta$	$B$	$R$	$\Delta$	$B$	$R$	$\Delta$
40,2	40,6	-0,4	37,8	39,55	-1,75	49,5	49,25	+0,25
43,45	42,7	+0,75	46,3	44,55	+1,75	44,1	43,95	+0,15
—	—	—	—	—	—	48,15	48,45	-0,30

$\varrho_0 = 499 \text{ mm}$				$\varrho_0 = 682 \text{ mm}$				$\varrho_0 = 883 \text{ mm}$			
	$B$	$R$	$\Delta$		$B$	$R$	$\Delta$		$B$	$R$	$\Delta$
$f_0$	49,7	49,35	+0,35		60,7	60,5	+0,2		64,1	62,5	+1,6
$f_1$	54,65	54,5	+0,15		55,45	55,35	+0,1		66,8	66,8	0,0
$f_2$	50,6	50,1	+0,5		60,3	60,3	0,0		62,55	61,9	+0,65
$f_3$	51,85	51,7	+0,15		56,5	56,95	-0,45		67,5	66,85	+0,65
$f_4$	—	—	—		$=f_3$	56,4	(+0,1)		$=f_0$	64,2	(-0,1)
$f_5$	—	—	—		$=f_2$	60,1	(+0,2)			62,8	(+1,8)

Summe der positiven Differenzen =  $\Sigma(+\Delta) = 7,25^{\circ}$ .

Summe der negativen Differenzen =  $\Sigma(-\Delta) = 2,90^{\circ}$ .

$\Delta$  im Mittel =  $\pm 0,53^{\circ}$ .

1) Die Messungsreihe für  $\varrho_0 = 187 \text{ mm}$  war die letzte an diesem Tage und vielleicht wegen Ermüdung weniger sorgfältig ausgeführt.



$\Delta$  im Mittel =  $\pm 0,48^\circ$ .



Oct. 3. Minimum in der Mitte.  $\beta = \frac{(2n+1)}{2} \cdot \pi$ . Linie F.

$$\varrho = 1075 \text{ mm} \quad \lambda = 0,486 \text{ mmm} \quad \varepsilon = 9,0' \quad 90^\circ - i = 7,2^\circ$$

$\varrho_0 = 195 \text{ mm}$			$\varrho_0 = 309 \text{ mm}$			$\varrho_0 = 394 \text{ mm}$			$\varrho_0 = 514 \text{ mm}$		
B	R	$\Delta$	B	R	$\Delta$	B	R	$\Delta$	B	R	$\Delta$
39,1	39,25	-0,15	42,55	42,95	-0,4	45,4	45,6	-0,2	50,0	49,15	+0,85
40,2	40,15	+0,05	42,5	42,4	+0,1	45,6	45,4	+0,2	48,8	49,5	-0,7
—	—	—	43,75	43,8	-0,05	45,1	45,1	0,0	50,0	49,15	+0,85
—	—	—	—	—	—	> $f_1$	46,5	—	—	—	—

Summe der positiven Differenzen =  $\Sigma(+\Delta) = 2,05^r$

Summe der negativen Differenzen =  $\Sigma(-\Delta) = 1,5^r$

$\Delta$  im Mittel =  $\pm 0,32^r$ .

Bei einer jeden Messungsreihe war ausserdem die Reihenfolge der Fransen in Bezug auf ihre Helligkeiten geschätzt worden. Eine Vergleichung dieser Schätzungen mit den Breiten der Fransen, der Grösse nach geordnet, zeigte mit wenigen Ausnahmen eine so gute Uebereinstimmung, dass ich es für überflüssig gehalten habe, diese Schätzungen in die obige Zusammenstellung mit aufzunehmen. Drei vollständige Messungsreihen musste ich verwerfen; eine, weil ich nicht sicher war, bei grösseren  $\varrho_0$  die Mittelfranse richtig angenommen zu haben, und die beiden anderen, weil die Neigung der Spiegel sich während der Messungen um  $20''$ , resp.  $25''$  geändert hatte.

Sieht man die durch Rechnung gefundenen Werthe der Fransenbreiten als exact an und berechnet damit den wahrscheinlichen Fehler einer gemessenen Fransenbreite, so erhält man:

für Sept. 17 w. F. = $0,36^r$	für Sept. 26 w. F. = $0,36^r$
„ „ 19 = $0,44$	„ Oct. 1 = $0,41$
„ „ 22 = $0,52$	„ „ 3 = $0,32$
(resp. $0,37$ , mit Fortlassung von $\varrho_0 = 187 \text{ mm}$ )	

Andererseits betrug der aus der Vergleichung der Messungen unter einander abgeleitete wahrscheinliche Fehler einer Bestimmung im Mittel:

$$\text{w. F.} = 0,25^r.$$

Beachtet man nun, dass die der Rechnung zu Grunde liegenden Constanten, im ganzen 7 an der Zahl, mit Feh-

lern behaftet sind, dass kleine Unebenheiten der Spiegelsebenen in der Nähe der beugenden Kante die Erscheinung erheblich modificiren können, und endlich dass constante Fehler in der Auffassung der Minima sehr wahrscheinlich sind, weil die Minima von Maximis ungleicher Helligkeit begrenzt werden und kein symmetrisches Bild darbieten, so gelangt man zu dem Schluss, dass die Unterschiede zwischen der Theorie und den Messungen durchweg innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler liegen. Die Uebereinstimmung der Theorie mit den Erscheinungen kann hiernach als eine vollkommen befriedigende bezeichnet werden.

Auch mit verschiedenen Doppelp Prismen habe ich Versuche angestellt, die indess zu weniger günstigen Resultaten geführt haben, als die obigen mit dem Doppelspiegel. Namentlich zeigte ein Doppelp Prisma, das anscheinend gut geschliffen war, ein ganz eigenthümliches Verhalten, indem es für die Fransenbreiten durchgehends grössere Werthe ergab, als die Theorie verlangte. Worin der Grund dieser Abweichungen lag, vermag ich nicht mit Sicherheit anzugeben. Verschiedene Umstände sprachen aber dafür, dass die Prismenflächen in der Nähe der Schneide ein wenig gekrümmt waren. Ich übergehe deshalb die Beschreibung dieser Versuche und Messungen und will nur anführen, dass dieselben in keiner Weise der Theorie widerstreiten, sie vielmehr insofern noch stützen, als sie die über die Oscillationen der Fransenbreiten und Helligkeiten abgeleiteten Sätze vollkommen bestätigen.

Zum Schluss mögen noch ein paar Worte über die Messungen gesagt werden, aus denen Fresnel die Uebereinstimmung seiner Theorie mit den Erscheinungen folgern zu können glaubte, und die meines Wissens auch die einzigen sind, die hierüber veröffentlicht worden sind.

Von diesen Messungen beziehen sich zwei auf den Doppelspiegel und eine auf das Doppelp Prisma, und zwar war nach Fresnel's Angaben<sup>1)</sup> bei der ersten Messung mit dem Doppelspiegel:  $\varphi = 2323 \text{ mm}$   $\varphi_0 = 4693 \text{ mm}$   $2x = 12,16 \text{ mm}$   $\lambda = 0,638 \text{ mmm}$ ,

1) Fresnel, Oeuvr. compl. 1. p. 329.

bei der zweiten Messung mit dem Doppelspiegel:

$$\varphi = 2321 \text{ mm} \quad \varphi_0 = 4638 \text{ mm} \quad 2x = 14,65 \text{ mm} \quad \lambda = 0,638 \text{ mm},$$

bei der dritten Messung mit dem Doppelprisma:

$$\varphi_0 + \varphi = 7142 \text{ mm} \quad 2x = 21,65 \text{ mm} \quad \lambda = 0,638 \text{ mm}.$$

(Bei dieser letzten Messung ist die Distanz  $\varphi$  nicht besonders angegeben; es ist aber wahrscheinlich, dass sie nahezu dieselbe war, wie bei den ersten Messungen, und ich nehme daher  $\varphi = 2322 \text{ mm}$  ( $\varphi_0 = 4820 \text{ mm}$  an).

Berechnet man nun mit diesen Daten die ideale Fransenbreite  $\varphi_0$  und die Abweichungen der Breite und Helligkeit der Mittelfranse,  $a$  und  $b$ , in derselben Weise wie oben, so erhält man:

für die erste Messung:	$a = 2,48$	$b = 7,80$	$\varphi_0 = 0,368 \text{ mm}$
„ „ zweite „	$= 2,06$	$= 6,48$	$= 0,303 \text{ „}$
„ „ dritte „	$= 1,39$	$= 4,36$	$= 0,211 \text{ „}$

Man sieht also, dass die Schwankungen in der Breite und Helligkeit der Mittelfranse (und natürlich um so mehr bei den Seitenfransen), selbst bei den günstigen Bedingungen, die Fresnel für seine Versuche wählte, nicht unerheblich sind und namentlich in der Helligkeit 10 bis 15 Proc. der durchschnittlichen Helligkeit betragen. Es unterliegt daher keinem Zweifel, dass diese Unterschiede mit einer stärkeren Vergrößerung leicht zu erkennen sein werden. Andererseits ist es leicht erklärlich, warum Fresnel durch seine Messungen auf dieselben nicht aufmerksam wurde. Er benutzte nämlich zu denselben ein Fadenmikrometer mit geringer Vergrößerung, welches die Abstände der Streifen nur bis auf 0,01 mm zu bestimmen erlaubte, während die Unterschiede in den Fransenbreiten im Maximum 0,02 mm betrugen; ferner mass er auch nicht die Abstände aufeinanderfolgender, sondern nur entfernter Minima voneinander und erhielt deshalb für die Fransenbreite einen Mittelwerth, welcher sehr nahe der idealen Fransenbreite  $\varphi_0$  gleichkommen musste.

Die folgende Tafel für  $M(v)$  und  $N(v)$  liefert die Werthe dieser Functionen auf 1 bis 2 Einheiten der fünften Stelle genau.

$v$	$M(v)$	$v$	$N(v)$	$v$	$M(v)$	$v$	$N(v)$
0,0	0,62666	0,0	0,62666	3,1	0,00810	3,1	0,16008
0,1	0,53292	0,1	0,62103	3,2	0,00739	3,2	0,15521
0,2	0,45130	0,2	0,60643	3,3	0,00676	3,3	0,15062
0,3	0,38109	0,3	0,58578	3,4	0,00620	3,4	0,14628
0,4	0,32122	0,4	0,56136	3,5	0,00570	3,5	0,14218
0,5	0,27051	0,5	0,53488	3,6	0,00525	3,6	0,13830
0,6	0,22781	0,6	0,50761	3,7	0,00485	3,7	0,13463
0,7	0,19198	0,7	0,48045	3,8	0,00448	3,8	0,13113
0,8	0,16201	0,8	0,45402	3,9	0,00414	3,9	0,12780
0,9	0,13698	0,9	0,42871	4,0	0,00384	4,0	0,12464
1,0	0,11610	1,0	0,40476	4,1	0,00357	4,1	0,12164
1,1	0,09868	1,1	0,38229	4,2	0,00333	4,2	0,11878
1,2	0,08413	1,2	0,36135	4,3	0,00311	4,3	0,11604
1,3	0,07197	1,3	0,34190	4,4	0,00291	4,4	0,11342
1,4	0,06179	1,4	0,32390	4,5	0,00272	4,5	0,11092
1,5	0,05325	1,5	0,30727	4,6	0,00255	4,6	0,10852
1,6	0,04607	1,6	0,29192	4,7	0,00239	4,7	0,10622
1,7	0,04001	1,7	0,27775	4,8	0,00224	4,8	0,10402
1,8	0,03488	1,8	0,26467	4,9	0,00211	4,9	0,10191
1,9	0,03053	1,9	0,25260	5,0	0,00199	5,0	0,09988
2,0	0,02682	2,0	0,24145	5,1	0,00188	5,1	0,09793
2,1	0,02365	2,1	0,23113	5,2	0,00177	5,2	0,09605
2,2	0,02093	2,2	0,22156	5,3	0,00167	5,3	0,09425
2,3	0,01860	2,3	0,21267	5,4	0,00158	5,4	0,09251
2,4	0,01658	2,4	0,20442	5,5	0,00149	5,5	0,09084
2,5	0,01482	2,5	0,19675	5,6	0,00141	5,6	0,08922
2,6	0,01329	2,6	0,18959	5,7	0,00134	5,7	0,08766
2,7	0,01197	2,7	0,18290	5,8	0,00128	5,8	0,08615
2,8	0,01081	2,8	0,17663	5,9	0,00122	5,9	0,08469
2,9	0,00979	2,9	0,17076	6,0	0,00116	6,0	0,08328
3,0	0,00889	3,0	0,16525				

Für  $v > b$  ist bereits auf Stellen genau:

$$M(v) = \frac{1}{4v^3} \quad N(v) = \frac{1}{2v}$$

## VI. Ueber Anwendung des Telephons zur Bestimmung des Widerstandes galvanischer Ketten und Säulen; von Emil Less aus Königsberg i. Pr.

Während die chemischen und die electromagnetischen Messinstrumente nur die Intensität von solchen galvanischen Strömen bestimmen lassen, welche längere oder kürzere Zeit hindurch in einer Richtung wirken, für schnelle Stromesschwankungen dagegen unempfindlich sind, werden die Apparate, die auf den thermischen oder electrodynamischen Wirkungen des Stromes beruhen, von den ge-

bräuch  
meter,  
gleiche  
Classen  
Jahren  
dasselb  
Aend  
ob die  
oder in  
besteh  
ersetzt  
Nicht  
in der  
stande  
combi  
dersel  
in an  
wenn  
oder  
men  
welch  
bei g  
ein i  
als c  
kann  
const  
ben  
raus  
raus  
belie  
wird  
stitu

1  
Ann.  
Würz  
Wied  
5. p.  
An

bräuchlichen also vornehmlich das Weber'sche Electrodynamometer, von constanten und alternirenden Strömen in gleicher Weise beeinflusst. Zu diesen zwei verschiedenen Classen galvanischer Messinstrumente ist seit den letzten Jahren als eine dritte das Telephon hinzugetreten, indem dasselbe, in einen Stromkreis eingeschaltet, die geringsten Aenderungen in der Intensität desselben anzeigt, gleichviel ob dieselben in einfachen Verstärkungen oder Schwächungen oder in schnell wechselnden Verstärkungen und Schwächungen bestehen. Das Telephon kann also überall das Dynamometer ersetzen, wo es sich darum handelt, das Vorhandensein oder Nichtvorhandensein alternirender Ströme zu prüfen, und ist in der That schon vielfach <sup>1)</sup> zur Bestimmung des Leitungswiderstandes von Electrolyten mittelst der Wheatstone'schen Drahtcombination benutzt worden. Ferner ist es im Brückenweige derselben statt des Galvanometers angewandt worden <sup>2)</sup>, um in anderen Zweigen auftretende Extraströme anzuzeigen, wenn der in einer Richtung fließende Hauptstrom geöffnet oder geschlossen wurde.

Befinden sich umgekehrt in einem von Wechselströmen durchflossenen Wheatstone'schen Viereck noch irgend welche constante electromotorische Kräfte, so bleibt bei gleichem Widerstandsverhältniss der beiden Seitenpaare ein in den Brückenweige eingeschaltetes Telephon in Ruhe, als ob jene Kräfte gar nicht vorhanden wären. Man kann daher mit Hülfe des Telephons den Widerstand von constanten galvanischen Ketten und Säulen in ganz derselben Weise bestimmen, wie seit den Arbeiten von F. Kohlrausch und Nippoldt, Kohlrausch und Grotrian, Kohlrausch allein u. a., die Bestimmung des Leitungswiderstandes beliebiger Electrolyte jetzt wohl am häufigsten ausgeführt wird. Nach dieser Methode habe ich im physikalischen Institut der Universität Heidelberg eine Reihe von Wider-

1) Wietlisbach, Inaug.-Diss. Zürich 1879. — Niemöller, Wied. Ann. 8. p. 656. 1879. — F. Kohlrausch, Verh. der phys.-med. Ges. zu Würzburg. N.F. 15. Febr. 1880; oder: Wied. Ann. 11. p. 653. 1880. — Long, Wied. Ann. 11. p. 37. 1880. — Hopkinson, Phil. Mag. (5) 11. Beibl. 5. p. 369. 1881. 2) Lorenz, Wied. Ann. 7. p. 161. 1879.

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XV.

standsmessungen an Daniell'schen und Bunsen'schen Elementen vorgenommen, wobei es immer gelang, wenn nicht gar zu kleine Vergleichswiderstände benutzt wurden, das Telephon zum völligen Schweigen zu bringen.

Aber auch an Ketten von mehr veränderlicher electromotorischer Kraft, von denen ein Daniell'sches Element ohne Diaphragma, Leclanché'sche und Bunsen'sche Chromsäureelemente und Batterien von mir untersucht wurden, hat sich das gleiche Verfahren als recht brauchbar erwiesen. Zwar wird das Telephon neben den Wechselströmen des Inductionsapparates auch alle sonst im Schliessungskreise auftretenden Stromesschwankungen anzeigen und daher in keinem Falle zu tönen aufhören, wenn sich in einem Zweige desselben veränderliche Elemente befinden. Wenn es jedoch von diesen allein erregt wird, also unter derselben Bedingung, bei welcher ohne die einseitigen Stromesänderungen der Brückenstrom zu Null werden würde, muss sein Ton die geringste Intensität besitzen, und es handelt sich daher nur darum, dies Minimum der Tonintensität zum Einstellen genügend hervorzuheben. Dies liess sich bei meinen Messungen immer dadurch erreichen, dass in den die Elemente enthaltenden Zweig des Wheatstone'schen Vierecks noch kleinere oder grössere metallische Widerstände eingeschaltet wurden, welche die Intensität der von jenen erregten Ströme in viel höherem Grade als die der gleichzeitigen Wechselströme verminderten, sodass also bei sonst wenig verringerter Tonstärke das Telephon auf ein sehr leises oder kaum hörbares Minimum des Tones eingestellt werden konnte. Mit mehr oder weniger grosser Genauigkeit, die natürlich gleichzeitig durch Hinzufügen bekannter Widerstände zu den zu bestimmenden verringert wird, muss es so nach dieser Methode für jedes auch noch so veränderliche Element den Widerstand für einen bestimmten Augenblick zu messen möglich sein, ausser wenn dasselbe so kleine Platten besitzt, dass auch durch die Wechselströme eine sehr bedeutende Polarisierung bewirkt wird, welche sich im Telephon ja ebenfalls durch ein nicht auslöschbares Tönen äussert.

Die Messungen, von denen einige Resultate weiter un-

ten mitgetheilt werden sollen, wurden, um die Zuverlässigkeit der Methode zu prüfen, unter mehrfach variirten Verhältnissen angestellt. Als Stromerreger diente entweder ein gewöhnlicher du Bois-Reymond'scher Schlittenapparat, dessen primäre Spirale 0,76, secundäre 321,7 S.-E. Widerstand besass, oder ein von Hrn. Eugen Hartmann in Würzburg ausgeführtes Inductorium mit solidem Eisenkern, wie es für die Widerstandsbestimmungen von Hrn. F. Kohlrausch eingerichtet und beschrieben worden ist.<sup>1)</sup> Der Widerstand der primären Rolle des letzteren betrug 1,34, der secundären bei hintereinander geschalteten Abtheilungen 48,0 S.-E., die Anzahl der Unterbrechungen — wenn es durch 1 Bunsen'sches Element getrieben wurde, 80—90 in der Secunde. Beim Schlittenapparat, welcher ebenfalls in der Regel durch 1 Bunsen in Gang gesetzt wurde, liess sich die Anzahl Stromunterbrechungen bis auf etwa 300 in der Secunde steigern, meistens wurde aber nur eine zwischen 130 und 170 liegende angewandt.

Die vier Zweige des Wheatstone'schen Vierecks bestanden aus einer durch das Contactröllchen in zwei Hälften getheilten Kohlrausch'schen „Brückenwalze“<sup>2)</sup>, den zu bestimmenden Elementen, zu welchen zur passenden Abschwächung ihres Stromes die vier Widerstände der Brückenwalze von 1, 10, 100 und 1000 S.-E. oder andere durch Stöpsel ein- oder auszuschaltende Widerstände gefügt wurden, endlich aus einem Siemens'schen Widerstandskasten von 1 bis 5000 S.-E. und dazu einem Neumann'schen geradlinigen Rheostaten, welcher die Unterabtheilungen der Einheiten lieferte. Vom letzteren gingen durchschnittlich 460 mm der beiden neben einander ausgespannten, durch ein verschiebbares Quecksilbernäpfchen verbundenen Platindrähte, auf 1 S.-E., was sehr häufig von neuem controlirt werden musste. Die Ströme des Inductoriums wurden dem Systeme einerseits durch das Contactröllchen der Brückenwalze, andererseits durch die Verbindungsstelle zwischen Widerstandskasten und den zu messenden Widerständen zugeführt. Letztere beiden Zweige waren mit den beiden Enden der Brückenwalze durch

1) F. Kohlrausch, Wied. Ann. 11. p. 653. 1880.

2) F. Kohlrausch, l. c. p. 658.



eine Pohl'sche Wippe verbunden, in welche gleichzeitig das den Brückenweig bildende Telephon eingeschaltet wurde, meistens ein gewöhnliches Bell'sches, dessen Inductionsdraht 25,5 S.-E. Widerstand besass.

Statt der von Hrn. Hartmann ausgeführten Brückenwalze von etwa 15 S.-E. Widerstand wurde sehr häufig eine dieser aus Neusilberdraht von der gleichen Dicke (0,2 mm) nachgebildete angewandt. Derselbe war in zwei Abtheilungen von je 5 Windungen auf ein Becherglas von 10 cm Durchmesser aufgewunden, welche mit einander durch den einen Draht eines zweiten Neumann'schen Rheostaten verbunden wurden. Durch den anderen Draht des letzteren, dessen beide Enden dann zum einen Pole des Inductoriums führten, wurden die Ströme zugeleitet, und die Aenderung der Tonstärke im Telephon bis zum völligen Auslöschen des Tones liess sich jetzt durch Verschieben des Quecksilbernäpfchens längs der Holzscala des Rheostaten langsamer und, wenn nur Platindraht und Quecksilber rein waren, mit ebensowenig Nebengeräuschen bewerkstelligen als bei der ganz aus homogenem Neusilberdraht bestehenden Brückenwalze. Der Gesamtwiderstand des so aus Neusilber- und Platindraht hergestellten Verzweigungsdrahtes betrug 14,4 S.-E. und konnte zur Messung sehr kleiner Widerstände bequem auf 1,3 S.-E. vermindert werden, indem das Becherglas ausgeschaltet und die Enden des Platindrahtes direct mit den anderen Zweigen der Brücke verbunden wurden. Doch geschah dies, um Erwärmungen der Drähte durch den Strom des untersuchten Elementes zu vermeiden, nur sehr selten, da auch bei recht ungleichem Widerstand der beiden Seitenpaare des Wheatstone'schen Vierecks noch sehr genaue Messungen möglich sind. Dies dürfte eben als ein besonderer Vorzug erscheinen, welchen die Brückenmethode auch vor den Compensationsmethoden besitzt, dass es bei ersterer viel weniger auf die Auswahl der zur Vergleichung dienenden Widerstände ankommt. In der That gelang es, mit demselben Verzweigungsdraht und denselben Stöpselrheostaten Widerstände von Elementen fast mit gleicher Genauigkeit zu bestimmen, die etwa zwischen den Grenzen von 0,1 und 5000 S.-E.

lagen.  
einmal  
einer  
als zw  
D  
Weise  
Wider  
mit ei  
gleich  
zum V  
dageg  
oder  
zur A  
hinzu  
wenn  
Genau  
des V  
theil  
im Z  
auch  
die M  
Wider  
Brück  
gleich  
und l  
stand  
dami  
den  
desh  
wider  
noch  
am V  
schw  
durch  
Jede  
mit  
und  
beid



lagen. Ist daher der Apparat für solche Bestimmungen erst einmal zusammengestellt, so vollzieht sich die Messung an einer beliebigen galvanischen Kette oder Säule in weniger als zwei Minuten.

Dieselbe kann je nach den Umständen in verschiedener Weise geschehen. Untersucht man ein Element von grossem Widerstande, so wird es immer am bequemsten sein, denselben mit einem Widerstand des Widerstandskastens dadurch zu vergleichen, dass man das Contactröllchen der Brückenwalze bis zum Verlöschen des Tones im Telephon verschiebt. Wenn dagegen der Widerstand des Elementes nur wenige Einheiten oder einen Bruchtheil einer Einheit beträgt, sodass es sich zur Abschwächung seines Stromes noch andere Widerstände hinzuzufügen empfiehlt, so wird bei diesem Verfahren, auch wenn man es nach Ausschalten des Elementes wiederholt, die Genauigkeit des Resultates um so mehr von der Homogenität des Verzweigungsdrahtes abhängen, ein je kleinerer Bruchtheil der eigentlich zu messende Widerstand von dem ganzen im Zweige enthaltenen ist. Es ist dann vorzuziehen und auch mit weniger Rechnung verbunden, die Contactrolle auf die Mitte des Verzweigungsdrahtes zu setzen und so viel Widerstand in den vierten Zweig der Wheatstone'schen Brücke einzuschalten, bis er dem im dritten enthaltenen gleich ist. Geschieht hier die letzte Einstellung durch Hin- und Herschieben des Quecksilbernäpfchens des zu dem Widerstandskasten gefügten Neumann'schen Rheostaten, so wird damit gleichzeitig die Intensität des vom Element herrührenden Stromes fortwährend ein wenig verändert. Ich habe deshalb häufiger erst einen etwas zu kleinen Vergleichswiderstand  $r$ , dann einen etwas zu grossen  $r'$  und dann wohl nochmals den ersteren eingeschaltet, jedesmal den Contact am Verzweigungsdrahte auf die Stelle  $\rho$  gerückt, wo das Verschwinden, resp. das Minimum des Tones eintrat, und dann durch Interpolation den gesuchten Widerstand  $x$  erhalten. Jede Einstellung der Contactrolle wurde wenigstens einmal mit wachsenden und einmal mit abnehmenden Scalentheilen und dann mit Umlegen der Wippe zur Vertauschung der beiden Hälften des Verzweigungsdrahtes, im ganzen also für

jeden Vergleichswiderstand mindestens viermal vorgenommen, was doch nur sehr kurze Zeit in Anspruch nimmt.

Die folgende an einem Bunsen'schen Salpetersäureelement *B* gewöhnlicher Form schnell hintereinander in doppelter Weise angestellte Messung möge als Beispiel dienen.

I.  $x = B +$  Widerstand X. Quecksilbercontact des Verzweigungsdrahtes (Neusilberspirale + Platindraht) hin und her geschoben, bis bei der Stellung  $\varrho$  kein Ton im Telephon hörbar war.

$r = 10$ S.-E.			$r' = 10$ S.-E. + 50 mm vom Platinrheostaten		$r = 10$ S.-E.	
Wippe	vorn	hinten	hinten	vorn	vorn	hinten
$\varrho = 496,0$	461,9		493,1	467,6	493,1	461,8
	496,2	459,0	496,1	462,2	499,1	458,0
	496,1	460,5	494,6	464,9	496,1	459,9
	$2\varepsilon = 35,6$		$2\varepsilon' = 29,7$		$2\varepsilon = 36,2$	

Nun ist, wenn  $2L$  den Widerstand des ganzen Verzweigungsdrahtes im selben Maasse wie  $\varepsilon$  angibt:

$$\frac{r}{x} = \frac{L - \varepsilon}{L + \varepsilon} = 1 - \frac{2\varepsilon}{L}, \quad \frac{r'}{x} = \frac{L + \varepsilon'}{L - \varepsilon'} = 1 + \frac{2\varepsilon'}{L}. \quad \text{Daher:}$$

$$x = r + \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \varepsilon'} (r' - r) = 10 \text{ S.-E.} + \frac{35,9}{65,6} 50 \text{ mm vom Platinrheostaten} = 10 + (27,9).$$

Ebenso fand sich: Widerstand  $X = 10 - (30,2)$ , wobei die Verbindungen zu Widerstandskasten u. s. w. dieselben waren, daraus folgt:  $B = (58,1) \text{ mm} = 0,1261 \text{ S.-E.}$

II.  $x = B +$  Widerstand I. Contact am Verzweigungsdraht auf die Mitte eingestellt. Vergleichswiderstand  $r$  verändert, bis jedesmal Auslösen des Tones eintrat.

$\varrho = 475$ . Wippe	vorn	hinten
$r = 1$ S.-E. +	32,9	32,9 mm vom Platinrheostaten.
	33,1	31,8
	30,9	32,1
	30,2	32,1
	31,8	32,2

Also:  $x = 1 + (32,0)$ ;  
es war Widerstand I  $= 1 - (26,3)$ , daher:  
 $B = (58,3) \text{ mm} = 0,1265 \text{ S.-E.}$

Befindet sich eine Säule von mehreren Elementen zur Untersuchung im Stromkreis, so beginnt bei einer electromotorischen Kraft von etwa 3 Bunsen der Unterbrecher des

Inductionsapparates, wenn er nur durch 1 Bunsen'sches Element getrieben wird, etwas langsamer zu spielen, und bei 4 Bunsen hört er ganz zu wirken auf. Man hat jedoch ein einfaches Mittel, auch bei einer Batterie von beliebig grosser Elementenzahl den Widerstand durch nur eine oder zwei Messungen zu finden, indem man sie nach Siemens in 2 Säulen von je der Hälfte der Elemente theilt, die man mit den gleichnamigen Polen hintereinander einschaltet. Zugleich lässt sich das Resultat durch Untersuchung der Elemente in kleineren Abtheilungen bequem controliren.

Z. B. wurde eine vierundzwanzigliedrige Chromsäurebatterie, deren Zink- und Kohleplatten, paarweise miteinander verbunden, in vier Reihen über Holzrahmen hingen, an denen sie sich alle gleichzeitig in die Gläser mit Chromsäure tauchen liessen, durch Entfernung der mittleren beiden Gläser Nr. 12 und Nr. 24 in zwei vollständig getrennte Säulen von je 11 Elementen verwandelt. Der Kürze halber möge der Widerstand zweier Elemente  $X$  und  $Y$ , wenn sie mit ungleichnamigen Polen verbunden sind, mit  $X+Y$ , wenn mit gleichnamigen, sodass ihre electromotorischen Kräfte einander entgegenwirken, mit  $X-Y$  bezeichnet werden. Es wurde gemessen:

$$\begin{aligned} \text{Elemente } (1+2+3+4) - (13+14+15+16) &= 15,05 \\ \text{„ } (5+6+7+8) - (17+18+19+20) &= 15,32 \\ \text{„ } (9+10+11) - (21+22+23) &= 10,95 \\ \text{also alle 22 Elemente in Summa} &= 41,32 \text{ S.-E.;} \end{aligned}$$

gleich darauf direct:

$$\text{Elemente } (1+2+\dots+11) - (13+14+\dots+23) = 41,04 \text{ S.-E.}$$

Dabei war jedesmal ein Widerstand von 100 Q.-E. in den Zweig der Elemente mit eingeschaltet. Etwas später ergab sich:

$$\begin{aligned} \text{Elemente } (1+2+3+4) - (13+14+15+16) \text{ mit } 0 \text{ S.-E.} &= 14,32 \\ \text{„ } (1+2+3+4) - (13+14+15+16) \text{ „ } 100 \text{ S.-E.} &= 14,59 \\ \text{„ } (12+24) \text{ mit } 100 \text{ S.-E. Widerstand} &= 3,50 \\ \text{„ } (12+24) \text{ „ } 10 \text{ „ „} &= 3,44 \\ \text{„ } (12+24) \text{ „ } 0 \text{ „ „} &= 3,45 \end{aligned}$$

Hierbei tauchten die 14—15 mm breiten Platten von einseitig amalgamirtem, auf der anderen Seite mit Wachs

überzogenem Zink und Kohle im Abstände von durchschnittlich 15 mm voneinander etwa 75 mm tief in die cylindrischen Gläser von 50—52 mm Durchmesser, welche alle bis zu einer Marke mit  $\frac{1}{4}$  l Chromsäure gefüllt waren. Diese hatte durch längeren Gebrauch eine fast schwarze Farbe angenommen, wie auch die Zinkplatten zum Theil schon stark angegriffen waren.

Um die Widerstandsbestimmung mit dem Telephon mit einer anderen, ebenfalls sehr bequemen Methode zu vergleichen, wandte ich das von Fuchs<sup>1)</sup> angegebene Verfahren an. Man verbindet die Pole des Elementes, dessen Widerstand  $w$  sei, zuerst mit den Quadranten eines Electrometers und dann ausserdem noch mittelst einer Nebenschliessung  $N$ . Sind die in beiden Fällen am Electrometer beobachteten Potentialdifferenzen  $E$  und  $e$ , so ist der Widerstand des Elements:

$$w = N \frac{E - e}{e}.$$

Die Uebereinstimmung der beiden Methoden war bei Daniell'schen und Bunsen'schen Elementen eine befriedigende, z. B.:

#### 1 Bunsen'sches Salpetersäureelement:

mit Telephon (0 S.-E. zugefügt)	$w = 0,1809$	S.-E.
gleich darauf mit Electrometer und $N = 0,1464$	0,07526	„
	$w = 0,1837$	0,2015 „
1 Stunde später mit Telephon (0 S.-E. zugefügt)	$w = 0,1952$	„

#### 2 Daniell'sche Elemente 1 und 2: 1 Stunde nach der Füllung

mit Telephon (10 S.-E. zugefügt)	$w_1 = 0,725$	$w_2 = 0,660$	S.-E.
mit Electrometer und $N = 0,1464$	1,435	1,435	0,1464 „
	$w_1 = 0,87$	0,941	$w_2 = 0,782$ 0,70 „
3½ Stunden darauf mit Electrometer			
$N = 1,435$	0,1464	0,1464	1,435 0,1464 „
$w_1 = 1,595$	1,47	$w_2 = 1,14$	1,258; $w_1 + w_2 = 2,856$ 2,81 „
1 Stunde darauf mit Telephon (10 S.-E. zugefügt)			
	$w_1 = 1,722$	$w_2 = 1,356$	$w_1 + w_2 = 3,072$ S.-E.

1) Fuchs, Pogg. Ann. 156. p. 161. 1875.

Daniell'sches Element mit engem Flüssigkeitsrohr (cf. p. 90):

mit Telephon  $w = 5007-5032$  S.-E.; bald darauf

mit Electrometer und  $N = 1000 \quad 500 \quad 5000 \quad 2000 \quad 2000 \quad 5000$  S.-E.

$w = 6104 \quad 5443 \quad 4945 \quad 4913 \quad 5034 \quad 4958$  S.-E.

Dagegen ergab sich bei einem Bunsen'schen Chromsäureelement:

mit Telephon (0 Q.-E. zugefügt)  $w = 0,1898$ ; gleich darauf

mit Electrometer und  $N = 0,1464 \quad 9,333 \quad 9,333 \quad 1,435$  S.-E.

$w = 2,36 \quad 3,50 \quad 3,06 \quad 3,25$  S.-E., gleich darauf

mit Telephon (0 S.-E.)  $w = 0,1959$ ; (10 S.-E. zugefügt)

$w = 0,2018$  S.-E.

Die Messung mit dem Electrometer setzt voraus, dass electromotorische Kraft und Widerstand in der geschlossenen Kette dieselben bleiben wie in der offenen. Man sieht also, wie sehr abweichende Resultate diese Annahme schon bei Chromsäureelementen liefert.

Die angeführten Beispiele werden genügen, um die Brauchbarkeit der Brückenmethode auch für galvanische Ketten und Säulen darzuthun. Natürlich ist dieselbe in gleicher Weise geeignet, auch die Aenderungen ihres Widerstandes mit allen verschiedenen Umständen zu untersuchen, von welchen seine Grösse abhängt. Haben zwar meine im Laufe der Sommermonate 1881 angestellten Messungen in dieser Hinsicht nicht viel Neues ergeben, so dürfte die Mittheilung ihrer allgemeinen Resultate doch nicht ganz des Interesses entbehren, da wohl die meisten älteren Untersuchungen dieser Art nach weniger sicheren Methoden vorgenommen sind.

In Bezug auf die zeitlichen Aenderungen des Elementenwiderstandes habe ich die vornehmlich von Petruschefsky<sup>1)</sup> aufgestellten Regeln durchweg bestätigt gefunden. Der Widerstand nimmt, am deutlichsten bei den Daniell'schen Elementen, in der ersten halben bis ganzen Stunde nach ihrer Zusammensetzung ab und bleibt dann kürzere oder längere Zeit ziemlich constant, um während der folgenden Stunden allmählich anzusteigen.

Der Widerstand eines Daniell'schen Elementes ge-

1) Petruschefsky, Bullet. de St. Pétersbourg 11. p. 342. 1853; 15. p. 336. 1857. Wied. Galv. (2) 1. p. 452.

wöhnlicher Form mit gutem, amalgamirtem Zinkcylinder in Schwefelsäure vom spec. Gewicht 1,070, lockerer Thonzelle, blankem Kupfercylinder in concentrirter Kupfervitriollösung fiel in den ersten zehn Minuten nach seiner Füllung von 0,837 auf 0,763, in der folgenden halben Stunde auf  $w = 0,621$ ; 0,610 S.-E. Nachdem es dann etwa drei Stunden geöffnet gestanden hatte, betrug  $w = 0,642$ ; 0,612 S.-E.; wiederum nach zweistündigem Öffnen  $w = 0,796$ ; 0,806. Die beiden aufeinander folgenden Zahlen wurden immer in Zwischenräumen von etwa 10 Minuten erhalten, während welcher Zeit die Kette geschlossen blieb. Ihre anfänglichen schnellen Widerstandsänderungen äusserten sich auch dadurch, dass trotz Hinzufügung von 10 S.-E. das Telephon zu Beginn der Messungen nur auf ein ziemlich lautes Minimum eingestellt werden konnte, welches bald leiser und leiser wurde und später gänzlich erlosch. Noch bedeutendere allmähliche Widerstandszunahme nach der ersten Stunde zeigt das Beispiel auf p. 88.

Ein Element, aus einem unten mit Kupfervitriollösung, oben mit verdünnter schwefelsaurer Magnesia gefüllten Cylinder bestehend, hatte den Widerstand,

nachdem das Zink soeben in die obere Lösung getaucht war . . . . .	$w = 15,35$ S.-E.
eine halbe Stunde darauf, während welcher der Strom geschlossen war . . . . .	$w = 14,99$ „
eine halbe Stunde darauf, während welcher der Strom geöffnet war . . . . .	$w = 15,03, 15,00, 14,93$ S.-E.
eine halbe Stunde darauf, während welcher der Strom geschlossen war . . . . .	$w = 15,14$ S.-E.

Dabei mussten zur empfindlichen Einstellung 100 S.-E. zugefügt werden.

Bei einem zu electrometrischen Messungen dienenden Daniell aus zwei Gläsern mit Cu in reinem Kupfervitriol, Zn in reinem Zinkvitriol, die durch ein enges Glasrohr überbrückt waren, betrug der Widerstand bei kurz aufeinander folgenden Bestimmungen:

am 5/7. 1881 bei 24° C.	$w = 4914, 4897, 4884$ S.-E.
„ 6/7. „ bei 24° C.	$w = 4919$ , eine halbe Stunde später: 4917 S.-E.
„ 6/8. „ „ 23° „	$w = 4991, 4973, 4948$ ; eine viertel Stunde später: 5005, 5025, 5032, 5007 S.-E.

Etwas langsamer gingen die Aenderungen der Bunsen'schen Salpetersäureelemente vor sich. Z. B. wuchs der Widerstand eines Elementes mit Schwefelsäure von 1,070 spec. Gewicht und frischer concentrirter Salpetersäure von der ersten halben Stunde nach der Füllung an gerechnet in den nächsten  $6\frac{1}{2}$  Stunden, während welcher es zu anderen Messungen vielfach geschlossen worden war, von 0,126 zu 0,155 S.-E. und in der folgenden Stunde noch zu 0,159 S.-E. an. Uebrigens zeigte sich der Widerstand der Bunsen'schen Elemente nicht sehr erheblich von der anfänglichen Concentration der Salpetersäure, selbst wenn dieselbe durch mehrwöchentlichen Gebrauch schon recht blass geworden war, und auch der Schwefelsäure abhängig, mehr von der Natur der beiden Metalle, ob die Kohlenplatten porös oder compact, die Zinkcylinder mehr oder weniger stark zerfressen waren. Bei den Daniell'schen Elementen mit Thonzelle hingegen war der Widerstand wesentlich durch die äussere, das Zink enthaltende Flüssigkeit bedingt. Als die Kette des obigen ersten Beispiels oder ein gleiches Exemplar mit einer durch Verdünnen aus concentrirter eben erst hergestellten Schwefelsäure von 1,070 spec. Gewicht gefüllt war, hatte es nur 0,4 bis 0,5 S.-E. Widerstand; mit einer sehr alten Säure vom gleichen spec. Gewicht, aber elfmal so grossem Widerstande, welche sich wahrscheinlich durch langen Gebrauch schon fast ganz in Zinkvitriollösung umgewandelt hatte, stieg er dagegen bei sonst derselben Füllung auf 2—3, selbst 4 Q.-E. an, während er bei den mit dieser Lösung gefüllten Bunsen'schen Elementen nur wenig grösser als sonst war. Der Grund dieses verschiedenen Verhaltens dürfte darin zu suchen sein, dass wahrscheinlich die Schwefelsäure leichter als Zinkvitriollösung in die Poren der Thonzelle eindringt, und die Diffusion sowohl des Kupfervitriols wie der Salpetersäure in die Schwefelsäure bei grösserem Gehalt an Zinkvitriollösung schneller vor sich geht, worauf auch der raschere Angriff der amalgamirten Zinkcylinder in dieser hinwies. Dadurch muss aber der Widerstand bei den Daniell'schen Ketten vermehrt, bei den Bunsen'schen verkleinert werden. Dies würde zugleich die grössere Wider-



standszunahme der ersteren nach mehrstündigem Gebrauche erklären.

Bei zwei viel benutzten Tauchelementen von Zink, Kohle, Chromsäure habe ich den Widerstand an verschiedenen Tagen ziemlich verschieden gefunden, z. B. bei dem einen am 19/6. 1881  $w = 0,351$  für  $21^{\circ}$  C.; am 3/7.  $w = 0,227$ ; am 6/8.  $w = 0,202$  S.-E. für  $24^{\circ}$  C.

Bei zwei Leclanché's mittlerer Grösse, deren Füllung seit mehreren Jahren nicht erneuert war, betrug der Widerstand durchschnittlich 3 S.-E.

Die Abhängigkeit des Elementenwiderstandes von der Intensität des hindurchgehenden Stromes kann nach der Brückenmethode in zweierlei Art untersucht werden, entweder indem man der zu messenden Kette grössere oder kleinere metallische Widerstände zufügt, oder, wenn mehrere Ketten vorhanden sind, indem man sie einmal mit ungleichnamigen Polen (+), das andere mal mit gleichnamigen (—) verbindet. Dieselben sind hier (abgesehen von der durch die Inductionsrolle gebildeten Nebenschliessung) durch die Brückenwalze und gleichzeitig durch den Telephonzweig geschlossen, welche zusammen in meinen Messungen einen Widerstand von 9,44 oder 9,18 S.-E. repräsentirten. Die Stromstärke der untersuchten Ketten wurde daher bei geringem inneren Leitungswiderstande durch Einschalten von je 1 S.-E. in ihren Zweig und den Nachbarzweig der Wheatstone'schen Brückencombination um etwa  $\frac{1}{5}$  verkleinert, von je 10 S.-E. auf  $\frac{1}{3}$ , von je 100 S.-E. auf  $\frac{1}{20}$  etwa reducirt, doch war sie von vorn herein nicht gross genug, um so beträchtliche Widerstandsänderungen zu erhalten, wie sie z. B. Hr. v. Waltenhofen<sup>1)</sup> bei Messung nach seiner Compensations- und nach der Ohm'schen Methode fand. Um die zeitlichen Aenderungen auszuschliessen, darf jede unter geänderten Umständen vorgenommene Messung immer nur mit dem Mittelwerth von einer vorher und einer nachher angestellten verglichen werden. So fand ich:

1) v. Waltenhofen, Pogg. Ann. **137**, p. 218. 1868.



zugefügt:	0 oder 1	8	10	100 S.-E.
1 Daniell mit Diaphragma . . .	0,413	0,474	—	— S.-E.
"   "   "   "   "   "   "   "   "   "	0,768	—	0,798	— "
"   "   "   "   "   "   "   "   "	0,606	—	0,616	— "
"   "   "   "   "   "   "   "   "	0,610	—	0,627	— "
1 Daniell ohne Diaphragma . . .	14,96	—	15,04	15,17 "
1 Bunsen'sches Salpetersäureelement	0,1865	—	0,2031	— "
"   "   "   "   "   "   "   "   "	0,1576	—	0,1757	— "
"   "   "   "   "   "   "   "   "	0,1322	—	0,1264	— "
"   "   "   "   "   "   "   "   "	0,1517	—	0,1568	— "
8 Bunsen'sche Chromsäureelemente	14,320	—	—	14,588 "
2   "   "   "   "   "   "   "   "   "	—	—	3,444	3,501 "

Verbindung:	+	—
2 Daniell'sche Elem. mit zugefügten 10 S.-E.	1,391	1,434 S.E.
"   "   "   "   "   "   "   "   "	3,110	3,126 "
"   "   "   "   "   "   "   "   "	3,206	3,212 "
"   "   "   "   "   "   "   "   "	3,327	3,338 "
2 Bunsen'sche Salpetersäureelem. mit 10 S.-E.	0,1640	0,1663 "
"   "   "   "   "   "   "   "   "	0,2329	0,2431 "
2 Bunsen'sche Chromsäureelem. " " "	0,5417	0,5343 "

Bei Daniell'- und Bunsen'schen Elementen nimmt der Widerstand also fast immer mit grösserer Stromintensität ein wenig ab, während der Sinn der Aenderungen bei den Bunsen'schen Chromsäureelementen hiernach nicht sicher anzugeben ist.

Es lag der Zweifel nahe, ob nicht der Einfluss der Stromstärke der Elemente auf ihren Widerstand in diesen Messungen theilweise durch die gleichzeitig durch sie hindurchgehenden Wechselströme des Inductionsapparates verdeckt gewesen sei, welche sich mit Einschaltung von Widerständen ja auch nur in geringerem Maasse änderten. Um dies zu prüfen, schaltete ich in den die untersuchten Elemente enthaltenden Zweig der Wheatstone'schen Drahtcombination als Nebenschliessung zu einem passenden Widerstande beide Rollen eines Weber'schen Dynamometers ein und verglich die Ablenkungen der Bifilarrolle, wenn sich einmal in diesem Zweig ein Bunsen'sches Salpetersäureelement und der Stromunterbrecher des Inductoriums in Ruhe befand, darauf, nachdem jenes entfernt und dieser in Gang gesetzt war. So ergab sich,

dass noch bei der Schliessung mit 200 S.-E. Widerstand die Stromstärke des Bunsens etwa das Dreifache von der betrug, welche der Schlittenapparat, und fast  $\frac{2}{3}$  von der, welche das Kohlrausch'sche Inductorium im gleichen Zweige bei kleinsten Widerständen erregte. Da nun bei den meisten Messungen der Elementenwiderstände auch zu der Inductionsrolle noch Widerstände von 100 oder 280 S.-E. hinzugefügt waren, so konnten die alternirenden Ströme auf ihre Resultate wohl kaum einen Einfluss haben.

### VII. *Ueber die Existenz einer dielectrischen Polarisation in Electrolyten;* *von R. Colley in Kasan.*

§ 1. Die Vorgänge in den Electrolyten bei dem Durchgange des galvanischen Stromes sind in letzterer Zeit der Gegenstand zahlreicher Untersuchungen gewesen und von verschiedenen Standpunkten aus betrachtet worden. In einer früheren Abhandlung<sup>1)</sup> glaube ich experimentell bewiesen zu haben, dass die als Condensatorensystem angesehene galvanische Zersetzungszone nicht als ein Condensator, in welchem der Electrolyt die Rolle eines Dielectricums mit sehr grosser Dielectricitätsconstante spielt, betrachtet werden muss, dass vielmehr die Ansicht, nach welcher jede Electrode ein selbständiger Condensator, und der Electrolyt ein Leiter<sup>2)</sup> ist, die richtige sei.

Helmholtz, der zuerst diese letztere Ansicht ausgesprochen hat, hat neuerdings<sup>3)</sup> sehr treffend für die Elec-

1) Colley, Wied. Ann. 7. p. 206. 1879.

2) Einer Kritik gegenüber will ich hier bemerken, dass ich nie von einer metallischen Leitung der Electrolyte geredet, sondern nur ausgesprochen habe, dass sich die Masse des Electrolytes gegen alle Ströme ganz gleich verhält, nämlich wie ein zersetzbarer Leiter; nur der Vorgang an den Electroden ist verschieden, je nachdem die electromotorische Kraft zur Zersetzung des Körpers zureichend oder unzureichend ist.

3) Helmholtz, Wied. Ann. 7. p. 387. 1879.

troden den Begriff einer electrischen Doppelschicht eingeführt. Durch eine sprungweise Aenderung des Potentials zwischen zwei sehr nahe (in einer Entfernung von der Grössenordnung der Molecularabstände) liegenden Schichten von Körpermoleculen wird eine Anhäufung von Electricität auf denselben verursacht; eine solche Doppelschicht wirkt also wie ein in den Stromkreis eingeschalteter Condensator.

Obgleich aber die galvanische Polarisation (ein lediglich auf die Oberfläche der Electroden beschränkter Vorgang) mit der dielectrischen nichts gemein hat, so ist damit durchaus nicht bewiesen, dass letztere in den Electrolyten, sowie in leitenden Körpern überhaupt nicht existire. Wenn die Dielectricitätsconstante der Electrolyte und der übrigen Leiter von derselben Grössenordnung wie die der wahren Dielectrica ist (worauf die Werthe ihrer Brechungsexponenten hindeuten), so ist kaum zu erwarten, dass bei den bisher angewandten Versuchsmethoden die dielectrische Polarisation hätte hervortreten können. Nach den von Faraday und Maxwell vertretenen Ideen wird aber durch die Einwirkung einer electromotorischen Kraft auf jeden Körper (wenn nur derselbe kein absoluter Isolator ist) in demselben sowohl „Conduction“ d. h. electrische Leitung, sowie auch „Vertheilung“ oder dielectrische Spannung hervorgebracht. Ausserdem ist in Betracht zu nehmen, dass zwischen Nichtleitern und Leitern überhaupt keine scharfe Grenze zu ziehen ist. Es ist kaum denkbar, dass in einer Classe von chemisch so ähnlichen Körpern, wie z. B. in der Reihe der Fettsäuren, die niedrigen Homologen, wie Ameisensäure und Essigsäure, Electrolyte, die höheren aber, wie Stearinsäure, Dielectrica seien, ohne dass die Zwischenglieder, ja selbst alle Glieder der Reihe einen gemischten Charakter zeigten. Der Unterschied scheint hier mehr quantitativ als qualitativ zu sein und nur darin zu liegen, dass bei den extremen Gliedern der Reihe die Eigenschaften dieser oder jener Classe von Körpern mehr ausgeprägt sind.

Es schien mir nicht ohne Interesse zu sein, eine Reihe von Körpern zu untersuchen, in welcher die extremen Glieder Dielectrica, resp. Leiter (Electrolyte) sind, und die be-

kannten Erscheinungen, der dielectricischen, resp. galvanischen Polarisation zeigen, während die Zwischenglieder ihrem chemischen Charakter nach zwar zu den Electrolyten gehören, aber nur mittelmässig gut die Electricität leiten. In Bezug auf diese letzteren war zu erwarten, dass man in ihnen unter günstigen Bedingungen die Erscheinungen beider Arten von Polarisation nebeneinander werde beobachten können.

Stellen wir uns zwischen zwei nahe aneinanderliegenden Metallplatten eine Schicht einer zersetzbaren Flüssigkeit vor. Die eine Platte sei zur Erde abgeleitet, die andere könne mit dem Pole einer Kette in Verbindung gesetzt werden, ausserdem befinde sich im Stromkreise ein Galvanometer. Beim Schliessen des Stromkreises müssen wir theoretisch in der Flüssigkeitsschicht die Entstehung von zweierlei Ladungen voraussehen: erstens eine galvanische Polarisation, d. h. eine Ladung jeder Platte nach Art eines Condensators (Bildung einer electricischen Doppelschicht); zweitens eine dielectricische Polarisation. Zur Hervorbringung dieser Ladungen müssen durch die Galvanometerrolle entsprechende Electricitätsmengen durchströmen. In dem metallischen Theil des Schliessungskreises findet zwar auch neben der eigentlichen Leitung eine electricische Verschiebung oder dielectricische Polarisation statt; doch ist dieselbe wegen des durch die gute Leitungsfähigkeit der Metalle bedingten geringen Potentialgefälles und der kleinen Durchschnittsfläche der Leiters nur ganz unbedeutend und kann deshalb vernachlässigt werden. Ist die Flüssigkeit ein verhältnissmässig guter Leiter, so ist die galvanische Polarisation so überwiegend, dass neben ihr die dielectricische ganz verschwindet; zur Ladung der Electroden sind nämlich enorme Electricitätsmengen nöthig, die wegen der guten Leitung in kurzer Zeit durch den Stromkreis gehen, sodass starke Ströme zu Stande kommen. Leitet im Gegentheil die Flüssigkeit schlecht, so tritt erstens die dielectricische Polarisation stärker auf, da sie dem Potentialgefälle in der Flüssigkeit direct, also ihrem Leistungsvermögen unter sonst gleichen Umständen umgekehrt proportional ist; zweitens kann die Ladung der Electroden nur langsam vor sich gehen, also lange dauernde, aber nur schwache Ströme

geben  
die d  
decke  
Entla  
zug a  
merk  
grösse  
Minir  
eine  
Diese  
sation  
sie sie  
könn  
des I  
organ  
ist di  
Körp  
Acht  
licher  
die e  
setzu  
tisch  
Fall,  
electr  
den,  
§  
wir  
unter  
Z  
1 und  
Flüss  
wird  
Diele  
lyts  
Leitu  
(für  
Die  
stand  
Ann.

geben, welche die nahezu momentanen Ströme, durch welche die dielectricische Polarisirung hervorgebracht wird, nicht verdecken können. Aehnliche Vorgänge werden auch bei der Entladung der geladenen Zelle beobachtet werden. In Bezug auf den Entladungsstrom muss hier nur Folgendes bemerkt werden. Ist die electromotorische Kraft der Kette grösser als das zur Zersetzung des Electrolyten erforderliche Minimum, und dauert die Schliessung lange genug, so wird eine Ausscheidung von Ionen an den Electroden stattfinden. Diese Ionen können aber einen Rückstrom oder Depolarisationsstrom chemischen Ursprungs nur dann erzeugen, wenn sie sich ohne weitere Zersetzung an den Electroden anhäufen können und bei dem Rückstrom den ursprünglichen Stoff des Electrolyten wieder herzustellen im Stande sind. Bei organischen Stoffen von etwas complicirter Zusammensetzung ist dies aber nie der Fall; deshalb können wir bei diesen Körpern den chemischen Depolarisationsstrom ganz ausser Acht lassen. Der Entladungsstrom wird hier also im wesentlichen denselben Charakter zeigen, wie in dem Falle, dass die electromotorische Kraft der Kette keine definitive Zersetzung des Electrolyts hervorbringen kann. Den theoretisch zwar möglichen, aber doch nur als Ausnahme geltenden Fall, dass die secundären Zersetzungsproducte der Ionen electromotorisch wirken und eine Art Flüssigkeitskette bilden, können wir hier ausser Acht lassen.

§ 2. Der Sachverhalt wird klarer hervortreten, wenn wir die Frage einer kurzen mathematischen Behandlung unterwerfen.

Zwei gleiche Metallplatten 1 und 2 (Fig. 1) sind durch eine Flüssigkeitsschicht getrennt, der wir den doppelten Charakter eines Dielectriums und eines Electrolyts zuschreiben wollen. Der Leitungswiderstand der Schicht

(für zersetzende Ströme) sei  $r$ . Die Platte 1 kann durch einen Metalldraht vom Widerstande  $R$  entweder mit dem positiven Pole einer Kette

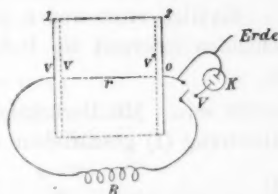


Fig. 1.

$K$ , auf welchem das Potential den constanten Werth  $V$  hat, oder mit der Erde verbunden werden. Die zweite Platte, sowie der negative Pol der Kette sind stets mit der Erde verbunden, sodass auf ihnen der Potentialwerth Null herrscht. Verbinden wir  $R$  mit  $K$ , so strömt die positive Electricität durch den Draht und ladet die Platte 1. Diese Platte fungirt erstens als Beleg eines Condensators, in welchem die Flüssigkeit die Rolle eines Dielectricums spielt, zweitens bildet sie mit der anliegenden Schicht Flüssigkeitsmoleculé ebenfalls einen Condensator (eine electriche Doppelschicht). — Aehnliches gilt von der Platte 2. Es sei  $v$  das veränderliche Potential auf der ersten Platte,  $v'$  das auf der anliegenden Schicht der Flüssigkeitsmoleculé,  $v''$  das Potential auf der Schicht, welche an der zweiten Platte liegt,  $C$  die Capacität der als ein Condensator betrachteten Flüssigkeits-schicht,  $C'$  die Capacität einer jeden der Doppelschichten, die wir als untereinander gleich voraussetzen werden. Drücken wir aus, dass die in dem Zeitelement  $dt$  durch  $R$  strömende Electricitätsmenge der sich auf der Platte 1 anhäufenden gleich ist, so erhalten wir für die Stromintensität in  $R$  die Gleichung:

$$(1) \quad \frac{V-v}{R} = C \frac{dv}{dt} + C' \frac{d}{dt} \cdot (v-v').$$

Die durch  $r$  in derselben Richtung strömende Electricität ladet die zweite electriche Doppelschicht, woraus sich die Gleichung ergibt:

$$(2) \quad \frac{v'-v''}{r} = C' \frac{dv''}{dt}.$$

Endlich muss wegen der Gleichheit der beiden Doppelschichten jederzeit die Bedingung:

$$(3) \quad v - v' = v''$$

erfüllt sein. Mit Berücksichtigung von (2) und (3) kann die Gleichung (1) geschrieben werden:

$$(4) \quad \frac{V-v}{R} = C \frac{dv}{dt} + \frac{v'-v''}{r}.$$

In dieser Form kann sie auch so aufgefasst werden, dass die „electriche Verschiebung“ plus dem Leitungsstrom in der Flüssigkeit dem Strome in  $R$  gleich sind.

Eliminirt man zunächst aus diesen drei Gleichungen die Grössen  $v'$  und  $v''$  und bezeichnet  $\frac{1}{4}C'$  durch  $c$ , so hat man:

$$(5) \quad \frac{d^2}{dt^2}(V-v) + \left(\frac{1}{CR} + \frac{1}{Cr} + \frac{1}{cr}\right) \frac{d}{dt}(V-v) + \frac{1}{CRcr}(V-v) = 0.$$

Es ist leicht, sich zu überzeugen, dass die Grösse  $v' - v''$  derselben Differentialgleichung genügt.

Das Integral der Gleichung (5), durch  $R$  dividirt, welches die Stromintensität im Zweige  $R$  ausdrückt, ist von der Form:

$$\frac{V-v}{R} = Ae^{-\alpha_1 t} + Be^{-\alpha_2 t},$$

wo  $A$  und  $B$  Integrationsconstanten sind. Die Ausdrücke für  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  sind etwas complicirt. Da aber, wie oben auseinandergesetzt worden ist, nur bei bedeutendem Widerstande der Flüssigkeitsschicht die dielectricische Polarisation neben der galvanischen deutlich hervortreten kann, und insoweit man nur Fälle, die praktisches Interesse darbieten, im Auge behält, kann man die Annahme machen, dass  $r$  sehr gross im Vergleich mit  $R$  ist; die höheren Potenzen des Bruches  $R/r$  können daher neben der ersten vernachlässigt werden. Entwickelt man die in  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  auftretenden Radicale nach dem binomischen Satze unter dieser Voraussetzung, so werden die Ausdrücke sehr vereinfacht, und man erhält schliesslich:

$$(6) \quad \frac{V-v}{R} = Ae^{-\left(\frac{1}{CR} + \frac{1}{Cr}\right)t} + Be^{-\frac{1}{cr}t}.$$

Da  $v' - v''$  derselben Differentialgleichung wie  $V - v$  genügt, so kann sich der Ausdruck für  $(v' - v'')/r$  nur durch den Werth der Integrationsconstanten von dem vorigen unterscheiden. Man hat also:

$$\frac{v' - v''}{r} = A'e^{-\left(\frac{1}{CR} + \frac{1}{Cr}\right)t} + B'e^{-\frac{1}{cr}t}.$$

Die Grössen  $(V-v)/R$  und  $(v' - v'')/r$  müssen aber der Differentialbedingung (4) genügen, sodass die Constanten beider Gleichungen nicht unabhängig sind. Unter Berücksichtigung dieses Umstandes hat man:



$$(7) \quad \frac{v' - v''}{r} = -A \frac{R}{r} e^{-\left(\frac{1}{CR} + \frac{1}{Cr}\right)t} + B \left(1 - \frac{CR}{cr}\right) e^{-\frac{1}{cr}t}.$$

Die Constanten bestimmen sich aus den Bedingungen  $v = v' = v'' = 0$  bei  $t = 0$ ; man erhält so unter Festhaltung der obigen Annäherungsgrenze:

$$\begin{aligned} \frac{V - v}{R} &= \frac{V}{R} \left(1 - \frac{R}{r}\right) e^{-\left(\frac{1}{CR} + \frac{1}{Cr}\right)t} + \frac{V}{r} \left(1 - \frac{R}{r} + \frac{CR}{cr}\right) e^{-\frac{1}{cr}t} \\ \frac{v' - v''}{r} &= -\frac{V}{r} \left(1 - \frac{R}{r}\right) e^{-\left(\frac{1}{CR} + \frac{1}{Cr}\right)t} + \frac{V}{r} \left(1 - \frac{R}{r}\right) e^{-\frac{1}{cr}t}. \end{aligned}$$

Lässt man endlich auch die erste Potenz von  $R/r$  fallen, so erhält man schliesslich die noch einfacheren Ausdrücke:

$$(8) \quad \frac{V - v}{R} = \frac{V}{R} e^{-\frac{1}{CR}t} + \frac{V}{r} e^{-\frac{1}{cr}t},$$

$$(9) \quad \frac{v' - v''}{r} = -\frac{V}{r} e^{-\frac{1}{CR}t} + \frac{V}{r} e^{-\frac{1}{cr}t}.$$

Dieser Grad der Annäherung konnte nicht von vorn herein in den Differentialgleichungen selbst angenommen werden, da sonst die Bestimmung der Integrationsconstanten Schwierigkeiten dargeboten hätte. Aus Gl. (8) sieht man, dass unter diesen vereinfachenden Annahmen in dem metallischen Leiter  $R$  gewissermassen zwei Ladungsströme nebeneinander verlaufen, ohne einander zu beeinflussen.

Ist  $V$  kleiner als das zur Zersetzung des Electrolyten erforderliche Minimum der electromotorischen Kraft, so sind die Gleichungen (8) und (9) jederzeit, d. h. von  $t = 0$  bis zu  $t = \infty$ , gültig. Ist dies aber nicht der Fall, so gelten die Gleichungen nur so lange, bis die Potentialdifferenz an den Doppelschichten das Maximum, bei welchem die Zersetzung beginnt, nicht erreicht hat. Bei eingetretener Zersetzung wird der Strom constant.

Um die Ausdrücke für den Entladungsstrom zu erhalten, müssen wir zunächst Null statt  $V$  in die Gleichung (6) einführen; nehmen wir ausserdem als positive Richtung der Ströme die dem vorigen Falle entgegengesetzte an, so erhalten die Gl. (6) und (7) folgende Gestalt:



$$(10) \quad \frac{v}{R} = A e^{-\left(\frac{1}{CR} + \frac{1}{Cr}\right)t} + B e^{-\frac{1}{cr}t},$$

$$(11) \quad \frac{v'' - v'}{r} = -A \frac{R}{r} e^{-\left(\frac{1}{CR} + \frac{1}{Cr}\right)t} + B \left(1 - \frac{CR}{cr}\right) e^{-\frac{1}{cr}t}.$$

Zur Bestimmung der Constanten müssen wir die Potentialvertheilung im Stromkreise vor der Entladung betrachten. Wir werden  $V$  grösser als die zur Zersetzung eben erforderliche electromotorische Kraft voraussetzen. Fig. 2 stellt diese Vertheilung vor,

wenn die Flüssigkeitsschicht bis zur Sättigung geladen ist. Als Abscissen sind die Widerstände, als Ordinaten die entsprechenden Potentialwerthe aufgetragen. Die Potentialdifferenz der beiden Flächen einer jeden Doppelschicht  $v - v'$  oder  $v'' - 0$  (die halbe electromotorische

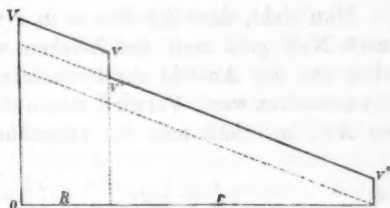


Fig. 2.

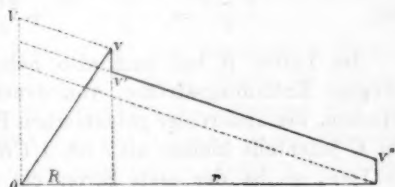


Fig. 3.



Fig. 4.

Kraft der galvanischen Polarisation) sei  $U$ . Fig. 3 stellt die Potentialvertheilung in dem Momente vor, wenn  $R$  mit der Erde in Verbindung gesetzt wird, die Entladung also eben an-

fängt. — In Fig. 4 hat sich die als ein Condensator wirkende Flüssigkeitsschicht schon nahezu entladen, die Doppelschichten aber noch nicht. Aus Fig. 2 und 3 ist ersichtlich, dass der Anfangswerth von  $v$  gleich  $(V - 2U)r/(R + r) + 2U$  oder  $V.r/(R + r) + 2U.R/(R + r)$  ist. Nimmt man an, dass

$U/V$  von derselben Grössenordnung wie  $R/r$  ist<sup>1)</sup>, so hat man als Anfangsgrössen für  $t = 0$ :  $v = V(1 - R/r)$ ,  $v - v' = v'' = U$ . Führt man die auf diese Weise bestimmten Constanten in die Gleichungen (10) und (11) ein, so hat man schliesslich:

$$(12) \quad \frac{v}{R} = \frac{V}{R} \left(1 - \frac{R}{r}\right) e^{-\left(\frac{1}{CR} + \frac{1}{Cr}\right)t} + \frac{2U}{r} \left(1 + \frac{R}{r} + \frac{CR}{cr}\right) e^{-\frac{1}{cr}t},$$

$$(13) \quad \frac{v'' - v'}{r} = -\frac{V}{r} e^{-\left(\frac{1}{CR} + \frac{1}{Cr}\right)t} + \frac{2U}{r} \left(1 - \frac{R}{r}\right) e^{-\frac{1}{cr}t}.$$

Man sieht, dass der Strom in  $r$  während der Entladung durch Null geht und das Zeichen wechselt, was übrigens schon aus der Ansicht der Potentialvertheilung Fig. 3 und 4 vorauszusehen war. Verwirft man auch hier die erste Potenz von  $R/r$ , so erhält man die angenäherten Ausdrücke:

$$(14) \quad \frac{v}{R} = \frac{V}{R} e^{-\frac{1}{CR}t} + \frac{2U}{r} e^{-\frac{1}{cr}t},$$

$$(15) \quad \frac{v'' - v'}{r} = -\frac{V}{r} e^{-\frac{1}{CR}t} + \frac{2U}{r} e^{-\frac{1}{cr}t}.$$

Im Leiter  $R$  hat man also nebeneinander zwei unabhängige Entladungsströme, von denen der eine der dielectrischen, der andere der galvanischen Polarisation entspricht. Da  $C$  jedenfalls kleiner als  $c$  ist,  $1/CR$  also sehr viel grösser als  $1/cr$ , so ist der erste Strom ein anfangs starker, aber rasch an Intensität abnehmender, während der zweite ein schwächerer, aber mehr andauernder ist. Besteht  $R$  nur aus dem Widerstande der Galvanometerrollen und dem inneren Widerstande der Kette, wie dies bei mir der Fall war, so kann der erste Strom praktisch als momentan betrachtet werden. Ist  $r = \infty$ , das zweite Glied der rechten Seite von Gleichung (14) also Null, so haben wir den Fall eines vollkommenen Isolators. Ist im Gegentheil  $r$  nicht sehr viel grösser als  $R$ , so stellt das zweite Glied einen beträchtlichen

1) Bei meinen Versuchen gebrauchte ich stets eine Kette von 48 Bunsen'schen Chromsäureelementen, während  $U$ , die halbe electromotorische Kraft der galvanischen Polarisation, in keinem bekannten Falle 1 bis  $1\frac{1}{2}$  Daniell übersteigt. Die obige Annahme ist also vollkommen gerechtfertigt.

andauernden Strom dar, der auf das Galvanometer eine Wirkung ausüben kann, die so intensiv ist, dass neben ihr der dem ersten Gliede entsprechende momentane Stoss verschwindend ist.

§ 3. Bei meinen Versuchen beschränkte ich mich auf die Beobachtung des Entladungsstromes. Aus den vorhergehenden Betrachtungen ist ersichtlich, dass wenn die Möglichkeit der Entstehung eines Depolarisationsstromes chemischen Ursprungs ausgeschlossen ist, (vollkommene Isolatoren, organische Stoffe,) der Vorgang bei dem Entladungsstrom sehr viel einfacher als beim Ladungsstrom ausfällt. Die Stromintensität in dem metallischen Theil des Schliessungskreises lässt sich dann durch die Gleichung (14) darstellen.

Die von mir angewandte Versuchsmethode bestand im wesentlichen in Folgendem: Ein Condensator, bestehend aus einer Flüssigkeitsschicht zwischen Metallplatten, wurde durch eine Kette von 48 Chromsäureelementen geladen; mittelst eines Commutators wurde gleich darauf der Entladungsstrom durch ein Galvanometer geleitet und der Verlauf desselben beobachtet.

Der Condensator bestand aus drei versilberten Spiegelglasplatten von 75 cm Länge und 50 cm Breite, die horizontal übereinander in einer verzinnnten Kupferwanne von entsprechender Grösse lagen und durch kleine flache Stückchen von Hartgummi, die längs des Randes zwischen die Platten gelegt waren, in einer Entfernung von 0,152 cm voneinander gehalten wurden. Diese Entfernung wurde durch Ausmessen der Dicke der Hartgummistückchen mittelst eines Sphärometers bestimmt. Die mittlere Platte war von beiden Seiten versilbert, die obere und untere aber jede nur von der einen Seite, die der mittleren Platte zugekehrt war. Durch Platinbleche, die fest an den Silberüberzug angelegt waren, konnten die Platten mit den übrigen Apparaten in metallische Verbindung gesetzt werden. — Die mittlere Platte einerseits, die beiden anderen andererseits bildeten also die Belege eines Condensators von 2. 75. 50 oder 7500 qcm Fläche und 0,152 cm Dicke. Sieht man von der Wirkung des Randes ab, so berechnet sich die Capacität desselben, mit Luft als

Dielectricum, zu 0,004 364 Mikrofarad. Eine directe experimentelle Bestimmung durch Vergleich mit einem Etalon von Elliot in London ergab ein nur um zwei Procent abweichendes Resultat. Durch Eingiessen von verschiedenen Flüssigkeiten in die Wanne konnten Condensatoren mit beliebigen Zwischenschichten dargestellt werden.

Das Galvanometer war ein Wiedemann'sches (von Edelmann in München construiert) mit ringförmiger Magnetnadel und starker Dämpfung. Dies Instrument erwies sich für die vorliegende Untersuchung als besonders geeignet. Mittels des Compensationsmagnets wurde die Bewegung der Nadel nur eben aperiodisch gemacht; letztere hatte ein sehr geringes Trägheitsmoment und stellte sich sehr rasch in die Gleichgewichtslage ein. Die Einrichtung des Commutators, so wie überhaupt die Anordnung der Apparate bei den Versuchen ist schematisch in Fig. 5 abgebildet. In der linken Hälfte

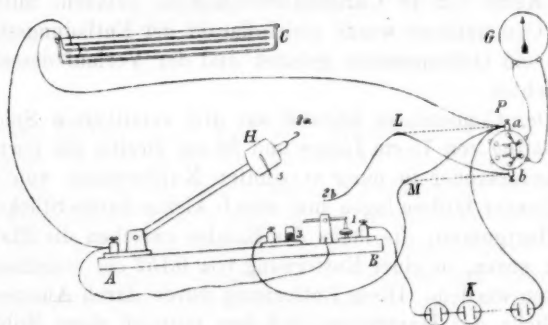


Fig. 5.

der Figur sind die Apparate im Durchschnitt, in der rechten im Plane dargestellt. *G* ist das Galvanometer, *P* ein Pohl'scher Gyrotrop, *K* die Kette von 48 Chromsäureelementen, *C* die Wanne mit den Spiegelglasplatten, *AB* der Commutator. Letzterer bestand aus einem Eisenhammer *H*, der von einer gewissen, nach Belieben regulirbaren Höhe herabfiel, wodurch die Contacte 1, 2 und 3 binnen eines kurzen Zeitraumes geschlossen, resp. geöffnet werden konnten. Wurden

alle drei Contacte gebraucht, (wie es die Fig. zeigt), so war die Reihenfolge dabei die folgende: Zuerst wurde Contact 1, (ein federnder Hebel auf eine Schraube mit Platinspitze drückend), geöffnet, dann Contact 2 für einen Augenblick geschlossen; dieser Contact bestand nämlich aus einem Platinhaken 2<sub>a</sub>, der einen Platindraht (in der Fig. im Punkte 2<sub>b</sub> projecirt) bei der Bewegung des Hammers im Vorübergehen berührte. Zuletzt wurde Contact 3, eine Platinspitze mit Quecksilbernapf, geschlossen. Aus der Anordnung der Drahtleitungen ist ersichtlich, dass anfangs die Belege des Condensators mit den Polen der Kette verbunden sind; nach Lösung des Hammers wird zuerst diese Verbindung unterbrochen; dann erfolgt eine momentane Entladung durch Contact 2, endlich entladet sich die noch übrig bleibende Electricitätsmenge durch 3. Ist *L* mit *b* und *M* mit *a* verbunden, so geht die „momentane Entladung“ durch das Galvanometer; die Nadel erhält einen Stoss, nach welchem sie wieder in die Ruhelage zurück kehrt. Verbindet man im Gegentheil *L* mit *a* und *M* mit *b*, so entladet sich die nach der momentanen Entladung übrigbleibende Electricitätsmenge durch das Galvanometer, und man erhält einen schwachen aber andauernden Strom; ich werde ihn den „nachbleibenden Strom“ nennen.

Obleich auf diese Weise, wie wir gleich sehen werden, die Existenz von zweierlei Entladungen, deren erste der dielectricischen, die zweite der galvanischen Polarisation entspricht, mit Bestimmtheit dargethan werden konnte, so erwies sich doch, dass über die momentane Entladung keine messenden Versuche nach dieser Methode angestellt werden könnten. Wegen der Selbstinduction in den Galvanometerrollen entstanden nämlich im Schliessungskreise des Entladungsstroms electricische Schwingungen. Die Dauer des Contactes 2 war aber nicht immer genau dieselbe, sodass die Unterbrechung des Stromkreises nicht stets in derselben Schwingungsphase geschah, und durch das Galvanometer nicht dieselben Electricitätsmengen gingen. Um so weniger waren Versuche mit verschiedenen Dielectricis untereinander vergleichbar, da die Schwingungsperiode bekanntlich von der

Capacität des Condensators, also der Natur des Dielectricums, abhängt. Durch die Verbindung der beiden Galvanometerrollen nebeneinander statt hintereinander konnte der Einfluss der Schwingungen einigermaßen verringert werden, ohne jedoch gänzlich zu verschwinden. Es wird durch eine solche Verbindung bekanntlich sowohl das Potential auf sich selbst, wie auch der Widerstand des Schliessungskreises vermindert, was ein schnelleres Ablaufen der Schwingungen zur Folge hat. Doch wird dadurch die Empfindlichkeit des Galvanometers für momentane Ströme auf die Hälfte reducirt.

Bei den meisten Versuchen wurde die „volle Entladung“ gemessen. Contact 2 wurde nämlich entfernt und *M* mit *b* verbunden. Auf diese Weise entlud sich die gesamte Electricitätsmenge durch Contact 3 und das Galvanometer. Bei einigen Flüssigkeiten wurde die volle Entladung nach einer momentanen Ladung (durch Contact 2) untersucht. Die Beschreibung dieser letzteren Versuchsanordnung kann hier unterlassen werden, da man sich leicht die dazu erforderliche Combination von Drahtleitungen vorstellen kann.

Da zur Füllung der Wanne 6 bis 8 kg Flüssigkeit erforderlich waren, so war die Auswahl der zu untersuchenden Stoffe ziemlich beschränkt. Auf den Gebrauch aller zu kostspieligen Materialien musste verzichtet werden. Die untersuchten Flüssigkeiten bilden eine Reihe, deren erste Glieder, (Kohlenwasserstoffe), Isolatoren sind, die letzten aber (organische Säuren, Fette und Salze) ihrem chemischen Charakter nach zu den Electrolyten gerechnet werden müssen. Für einen dieser letzteren Stoffe, nämlich für eine Lösung von ölsauerm Blei in Benzol, wurde die Zersetzung durch den Strom direct beobachtet. Die Lösung wurde in einem Becherglas mit Platinelectroden der Wirkung einer hundertpaarigen Zink-Kupfer-Wasserkette etwa vier Wochen lang ausgesetzt; nach Verlauf dieser Zeit konnte man mit dem Mikroskop auf der Kathode ganz deutlich ausgebildete kleine Bleikrystalle beobachten. Bedenkt man, dass wegen der kleinen Oberfläche der Electroden die ohnedies sehr schlecht leitende Flüssigkeit dem Strom einen enormen Widerstand darboten

musste, so durfte eine raschere Electrolyse auch nicht erwartet werden.

Da es sich bei der vorliegenden Untersuchung mehr um das Constataren einer Thatsache, nämlich der gleichzeitigen Existenz einer dielectrischen und galvanischen Polarisation in einigen Flüssigkeiten, als um die Ermittlung numerischer Coëfficienten handelte, so war die chemische Reinheit der gebrauchten Stoffe von nur untergeordneter Wichtigkeit. Die Darstellung von so grossen Mengen chemisch reiner Producte wäre auch sehr schwierig gewesen. Um so wichtiger erwies es sich aber, die Stoffe möglichst wasserfrei zu haben; denn selbst sehr kleine Mengen Feuchtigkeit machten das Experimentiren unmöglich. Bei wasserhaltigen Flüssigkeiten war nicht nur die galvanische Polarisation so überwiegend stark, dass die dielectrische neben ihr verschwand, sondern die Flüssigkeit und die versilberten Platten wirkten an und für sich electromotorisch, was freilich durch die nicht vollkommen gleiche Beschaffenheit der Oberfläche der letzteren im Moment des Eintauchens bedingt war.

Das Trocknen der Stoffe geschah, je nach ihrem chemischen Charakter, auf verschiedene Weise. Bei den Kohlenwasserstoffen wurde die Flüssigkeit zuerst mit concentrirter Schwefelsäure behandelt, wodurch neben dem Wasser auch Beimengungen von sauerstoffhaltigen Körpern zum grössten Theil entfernt wurden. Dann wurde sie decantirt und der Destillation unterworfen, die nöthigenfalls fractionirt war. Sauerstoffhaltige, nicht destillirbare Stoffe wurden längere Zeit über Chlorcalcium gehalten, dann abfiltrirt. Aether wurde zuerst mit Wasser geschüttelt, dann decantirt und destillirt; endlich mit metallischem Natrium behandelt, bis alle Wasserstoffentwicklung aufhörte. Die Wanne mit den Glasplatten wurde ebenfalls vor jedem Versuche getrocknet, indem ein Strom warmer und trockener Luft durch dieselbe geführt wurde.

Die nachfolgende Tabelle enthält eine Zusammenstellung der hauptsächlichsten Resultate.

Columnne I enthält die Namen der untersuchten Flüssigkeiten; II und III die ersten Ausschläge des Galvanometers,



in Centimeterscalentheilen, bei der „vollen“ Entladung, und zwar II, wenn die Zwischenschicht aus Luft, III, wenn sie aus der Flüssigkeit besteht. Die unter II angeführten Werthe sind nicht durchweg dieselben, weil die Grösse der Ladung in Abhängigkeit von der electromotorischen Kraft der Kette innerhalb gewisser Grenzen schwankte, und auch die Empfindlichkeit des Galvanometers im Laufe der Untersuchung möglicherweise sich etwas geändert haben mag, da die ganze Versuchsreihe mehrere Monate dauerte. Bei dem Versuche mit ölsaurem Blei wurden die zwei Galvanometerrollen nebeneinander verbunden, wodurch die Empfindlichkeit des Instruments für momentane Ströme auf die Hälfte reducirt wurde. Die zugehörigen Werthe von II und III sind aber selbstverständlich bei derselben Versuchsanordnung und stets an demselben Tage bestimmt. Ein jeder von ihnen ist der Mittelwerth einer Reihe von sechs bis acht einzelnen Beobachtungen, die nur ausnahmsweise um mehr als drei bis fünf Proc. voneinander abwichen. In Columnne IV ist der Anfangswerth des dem „nachbleibenden Stromes“ entsprechenden Ausschlages angeführt. Oben wurde schon auseinandergesetzt, dass dieser Ausschlag erhalten wird, wenn man die momentane Entladung entweder durch einen besonderen Schliessungskreis ableitet oder abwartet, bis die Galvanometernadel nach dem durch dieselbe ertheilten Stoss wieder zu Ruhe kommt. Columnne V enthält die Entladung nach einer momentanen Ladung; VI den Widerstand der Flüssigkeitsschicht in Megohms. Dieser wurde bestimmt, indem der Strom der Kette zuerst durch die Flüssigkeit und das Galvanometer allein, dann unter Hinzufügung eines Widerstandes von 0,92 Megohm geleitet wurde. Aus den zwei beobachteten Stromintensitäten lässt sich der gesuchte Widerstand auf bekannte Weise berechnen. Das Galvanometer wurde dabei stets mit einer geringeren Windungszahl als bei den Hauptversuchen gebraucht, da es sonst zu empfindlich gewesen wäre. Der supplementäre Widerstand von 0,92 Megohm bestand aus einer Reihe von dünnen Röhren, die mit Zinkvitriollösung gefüllt und mit Zinkelectroden versehen waren. Die letzte Columnne VII enthält endlich einige Dielectricitätsconstanten. Sie

werden  
spreche  
II divi  
dann d  
bei de

Name de

Benzol. 1  
" 2  
Leichtes K  
Schweres  
Petroleum  
Baumöl  
Oelsäure  
Lösung v  
in Benz  
Lösung v  
in Benz  
Aether.

"  
I  
werde  
zu ei  
„schw  
Desti  
lichen  
„Petr  
sische  
aus e  
dämp  
Stoffe  
getro  
I  
Stoffe  
komm  
leum



werden erhalten, wenn man von den Werthen III die entsprechenden Werthe IV subtrahirt und die Differenz durch II dividirt. Der Zähler und der Nenner des Bruches sind dann den „momentanen Entladungen“ proportional; ersterer bei den flüssigen Dielectricis, letzterer bei Luft.

I	II	III	IV	V	VI	VII
Name der Flüssigkeit	Volle Entladung		Anfangs- werth des rückblei- benden Stromes	Entladung nach momenta- ner Ladung	Widerstand der Flüssigkeit	Dielectri- citäts- constante
	Luft	Flüssig- keit				
Benzol. 1. Versuch . .	4,50	9,94	0	—	∞	2,21
„ 2. „ . .	4,05	8,80	0	—	∞	2,17
Leichtes Benzin . . .	4,32	7,78	0	—	∞	1,80
Schweres Benzin . . .	4,49	7,64	Spur	—	3,34	1,70
Petroleum . . . . .	4,95	10,12	Spur	—	4,64	2,04
Baumöl . . . . .	4,40	13,47	0,8	13,00	—	—
Oelsäure . . . . .	4,43	10,53	1,2	—	2,04	2,13
Lösung von Eisenchlorid in Benzol . . . . .	4,05	9,68	1,5	—	—	—
Lösung von ölsaurem Blei in Benzol . . . . .	2,17	—	Siehe den Text	2,69	1,94	—
Aether. 1. Versuch . .	4,50	—		16,0	—	—
„ 2. „ . .	4,63	—		16,8	—	—

In Bezug auf die gebrauchten Stoffe muss noch bemerkt werden, dass das Benzol ziemlich rein war und in der Kälte zu einer compacten Masse erstarrte. Das „leichte“ und „schwere Benzin“ sind ein Gemenge von ersten, resp. letzten Destillationsproducten der fractionirten Destillation des käuflichen Benzins behufs der Darstellung von Benzol. Das „Petroleum“ enthält alles, was aus dem käuflichen kaukasischen Petroleum bis zu 130° C. abdestillirt. Die Oelsäure, aus einer Stearinfabrik bezogen, war angeblich mit Wasserdämpfen destillirt; sie zeigte eine bräunliche Färbung. Alle Stoffe waren, wie oben beschrieben, vorläufig bearbeitet und getrocknet.

Die Ansicht der Tabelle zeigt, dass die ersten zwei Stoffe, nämlich Benzol und leichtes Benzin, sich wie vollkommene Isolatoren verhalten. Schweres Benzin und Petroleum zeigen Spuren von Leitung, die möglicherweise durch

nicht vollkommene Trockenheit oder Spuren von electrolysirebaren Substanzen bedingt sind. Baumöl und Oelsäure zeigen neben der dielectricischen schon ganz deutlich auch die galvanische Polarisation. Mit den Werthen 0,8 und 1,2 beginnend, nimmt bei diesen Stoffen der „nachbleibende Strom“ langsam, aber regelmässig ab und nähert sich asymptotisch der Null. — Dasselbe zeigt eine Lösung von Eisenchlorid in Benzol, wenn sie frisch bereitet in die Wanne gegossen wird. Nach einiger Zeit werden die Resultate unregelmässig, was wohl davon herrührt, dass das Salz sehr hygroskopisch ist und auch auf den Zinnüberzug der Wanne einzuwirken scheint. Aus diesen Gründen erwies sich eine ätherische Lösung von Eisenchlorid als ganz unbrauchbar. Uebrigens ist das Salz sowohl in Aether als in Benzol nur sehr wenig löslich, sodass die Flüssigkeit im wesentlichen nur aus dem Lösungsmittel bestand. Das ölsäure Blei hingegen löst sich in Benzol in reichlicher Menge, indem es eine zähe öltartige Flüssigkeit bildet. In ihr ist die galvanische Polarisation schon sehr bedeutend und im Vergleich mit der dielectricischen stark überwiegend. Die Beobachtung der „vollen“ Entladung ist hier zwecklos; denn der der Galvanometernadel durch die momentane Ladung ertheilte Stoss ist neben der starken, durch die galvanische Polarisation hervorgebrachten Ablenkung verschwindend. Die Existenz einer momentanen Entladung liess sich aber ganz deutlich, nach der oben beschriebenen Methode (mittelst Contact 2) darthun. Zur Verminderung der electricischen Schwingungen wurden beide Galvanometerrollen nebeneinander verbunden; ein völliges Verschwinden der Schwingungen und folglich ein nahezu constanter Werth der Ausschläge liess sich aber dadurch nicht erzielen. Die Ausschläge waren 2,20 bis 2,34 bei Luft und 4,03 bis 4,99 bei der Flüssigkeit. Zur Controle wurde durch einen besonderen Versuch ermittelt, dass der „nachbleibende“ Strom, durch Contact 2 und das Galvanometer geleitet, an dem letzteren nicht die geringste Ablenkung zu erzeugen vermochte. Die detaillirte Beschreibung der Versuchsanordnung kann hier unterlassen werden. Der nachbleibende“ oder galvanische Depolarisationsstrom zeigt bei

dieser  
dahin  
ten w  
curve  
näher  
versch  
reitet  
dies  
Entla  
verwe  
versch  
Die  
lumm

ein  
trisc  
raus  
rein  
begi  
tend  
mit  
wies

also  
der  
diel  
son  
bar  
sati  
ersi  
sell  
Un  
nich  
anz  
vor  
hei  
tisc  
der

dieser Flüssigkeit eine Anomalie, deren Erklärung zur Zeit dahingestellt werden muss. Er nimmt nicht, wie zu erwarten war, mit der Zeit nach dem Gesetze einer Exponential-curve ab, sondern steigt erst bis zu einem Maximum und nähert sich erst später asymptotisch einem von Null wenig verschiedenen Grenzwerthe. Als die Flüssigkeit frisch bereitet und getrocknet zum ersten mal gebraucht wurde, trat dies Maximum etwa 80 Secunden nach dem Anfange der Entladung ein. Nachdem sie aber einige Zeit in der Wanne verweilt und Feuchtigkeit aus der Luft angezogen hatte, verschob sich das Maximum gegen den Zeitanfangspunkt zu. Die Grösse der Entladung nach momentaner Ladung (Columnne V) ist auch auffallend klein.

Aether scheint in wasser- und alkoholfreiem Zustande ein vollkommener Isolator zu sein. Der zweiseitig symmetrische Bau seiner Molecüle lässt dies erwarten; nach Kohlrausch's Versuchen isolirt ja selbst Wasser, wenn es ganz rein ist, die Electricität vollkommen. Doch zieht Aether begierig Feuchtigkeit aus der Atmosphäre an und wird leitend und stark polarisierbar. Deshalb fallen die Versuche mit ihm nur sehr unsicher aus. Alkohol und Glycerin erwiesen sich aus demselben Grunde als ganz unbrauchbar.

Die Resultate der vorliegenden Untersuchung liefern also eine neue experimentelle Bestätigung der Richtigkeit der von Faraday und Maxwell vertheidigten Ideen. Die dielectrische Polarisation existirt nicht nur in Isolatoren, sondern auch in Leitern. Specieell wird dies für die zersetzbaren Leiter nachgewiesen. Mit der galvanischen Polarisation hat die dielectrische nichts gemein, was schon daraus ersichtlich ist, dass beide Erscheinungen in einem und demselben Körper nebeneinander bestehen können. Die in dieser Untersuchung angewandten Versuchsmethoden erlauben zwar nicht genaue Werthe der Dielectricitätsconstanten von Leitern anzugeben, was übrigens auch nur für chemisch reine Stoffe von Interesse wäre. So viel lässt sich aber mit Bestimmtheit sagen, dass die Dielectricitätsconstanten der electrolytisch leitenden Körper von derselben Grössenordnung wie die der wahren Dielectrica sind.

### VIII. Ueber den Differentialflaschenzug; von C. Bohn.

Die wichtigste und nützlichste Eigenschaft des in neuerer Zeit vielfach angewendeten Differentialflaschenzugs ist seine Selbstsperrung, vermöge welcher eine an ihm hängende Last nicht herabsinkt, auch wenn gar kein Zug ausgeübt wird; bekanntlich ist zum Senken der Last sogar noch ein besonderer Zug erforderlich. Man weiss, dass bei irgend einer Maschine Selbstsperrung nur dann bestehen kann, wenn die Hälfte oder mehr als die Hälfte der zugeführten Arbeit durch passive Bewegungswiderstände (Reibung) verbraucht wird. Der Wirkungsgrad oder Nutzeffect solcher selbstsperrenden Maschine kann also allerhöchstens 0,50 sein.

In Weisbach-Hermann<sup>1)</sup> findet man eine ziemlich ausführliche Theorie des Differentialflaschenzuges mit Berücksichtigung der Bewegungswiderstände, welche, ihrem Resultate nach, auch an anderen Orten mitgetheilt wird. Die Grundlage dieser Theorie ist der Satz, dass an einer festen Rolle der von der Rolle ablaufende Theil des Seiles oder der Kette eine  $k$ mal so grosse Spannung haben müsse als der auflaufende Theil ( $k > 1$ ). Durch diese Annahme soll sowohl der Zapfenreibungswiderstand als der Biegungswiderstand des Seiles oder der Kette Berücksichtigung finden. Der Coëfficient  $k$  wird dabei in bestimmter, hier nicht zu erörternder Weise aus Reibungscoëfficient, Biegungscoëfficient und Verhältniss der Zapfen- zum Rollendurchmesser zusammengesetzt. Es sind bei Aufstellung dieser Lehre einige Annahmen erforderlich gewesen über die Gesetze des Seilbiegungswiderstandes, welche keineswegs durch Erfahrung oder unbeanstandete Theorie feststehen. Nach jener Theorie findet man<sup>2)</sup> die Kräfte  $P$  und  $P'$ , welche an der freien Schleife des Differentialflaschenzuges zur Hebung, bezw. Senkung einer Last  $Q$  erforderlich sind:

1) Weisbach-Hermann, Lehrbuch d. Mechanik. 3. (2) p. 56—63.

2) Weisbach, l. c. p. 59.

$$P = Q \frac{k^2 - n}{1 + k}; \quad P' = Q \frac{1 - nk^2}{k^2 + k}$$

und die dem Heben, bezw. Senken entsprechenden Wirkungsgrade:

$$\eta = \frac{1 - n}{2} \cdot \frac{1 + k}{k^2 - n}; \quad \eta' = \frac{2}{1 - n} \cdot \frac{1 - nk^2}{k^2 + k}.$$

In diesen Formeln bedeutet  $n = r_2/r_1$  das Verhältniss der Halbmesser der kleineren und grösseren Scheibe der Doppelrolle des Differentialflaschenzuges.

Es fällt auf, dass der Wirkungsgrad unabhängig von der Grösse der Belastung erscheint, während doch von vornherein eingesehen werden kann, dass dem nicht so ist, und die Erfahrung dieses bestätigt. Betreffs dieser Erfahrung führe ich zunächst Messungen an, die sehr sorgfältig gemacht zu sein scheinen und von R. Stawell-Ball<sup>1)</sup> mitgetheilt sind.<sup>2)</sup> Sie sollen zur Begründung der Formel  $P = 3,87 + 0,1508 Q$  dienen, und der aus ihnen sich ergebende Nutzeffect wird einfach zu 0,38 angegeben. Das ist aber nur ein Mittelwerth; berechnet man die Versuche einzeln, so erkennt man eine deutliche und regelmässige Zunahme dieses Nutzeffects von 0,35 bis 0,41, wenn die Belastung von 56 Pfund auf 560 Pfund steigt. Es ist hier die durch Erhebung der losen Rolle, an welcher die Last hängt, geleistete Arbeit vernachlässigt, weil das Gewicht dieser Rolle klein ist im Vergleiche zu den von ihr getragenen Lasten. Zieht man aber, wie es genauer ist, dieses Eigengewicht der Rolle in Rechnung, so wird das bemerkte Wachsen des Wirkungsgrades mit steigender Last allerdings etwas weniger deutlich, denn durch die Beachtung des Rollengewichtes wird der Nutzeffect bei geringer Belastung stärker vermehrt als bei grosser Belastung.

Mit Weisbach's Coëfficient  $k = 1,06$  berechnet sich der Nutzeffect für das bei Ball's Differentialflaschenzug geltende Halbmesserverhältniss zu 0,518, d. h. die Rechnung besagt,

1) R. Stawell-Ball, *Experimental Mechanics*. London and New York p. 115. 1871.

2) Auch in desselben Verfassers *Elementary Lessons on applied Mechanics*, London Paris and New York.

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XV.

jener Flaschenzug sei nicht selbstsperrend. Man kann aber durch passende Erhöhung des Werthes von  $k$  diesen Widerspruch verschwinden machen und Uebereinstimmung der Rechnung mit dem Mittelwerthe aus Ball's Messungen herbeiführen.

Die mir unannehmbar scheinende Unabhängigkeit des Nutzeffects von der Belastung, wie sie die bisherige Theorie ergibt, war ein erster Anlass, eine andere Theorie zu versuchen. Eine weitere Veranlassung zu nachstehender Untersuchung erwuchs aus der zu bestreitenden Angabe, die ich überall fand, wo ich über den Differentialflaschenzug etwas las, es sei eine besondere Gestaltung der Rollen, wodurch diese fast zu Zahnrädern werden, und eine dazu passende Form der Ketten unerlässlich. So sagt Weisbach<sup>1)</sup>, zur Verhinderung des Gleitens oder Rutschens der Kette über die obere (Doppel)Rolle müsse diese mit Einkerbungen versehen sein, in welche die einzelnen Glieder der Kette sich einlegen, und deshalb könnten bei diesem Flaschenzuge nur Ketten und keine Seile verwendet werden. Aehnlich im illustrierten Preisverzeichniss von C. W. Julius Blancke u. Co. (Merseburg), wo Taf. 27 zu Weston's Patentdifferentialflaschenzuge bemerkt ist: Es können keine anderen als die von uns mitgelieferten Ketten zu diesen Flaschenzügen verwandt werden. Ferner heisst es in Goodeve<sup>2)</sup>: „selbstverständlich (of course) muss das Abgleiten der endlosen Kette von der Rolle dadurch verhindert werden, dass Hervorragungen oder Knaggen der Rolle in die Glieder der Kette eingreifen.“ Solche besondere Vorrichtungen sind aber weder selbstverständlich noch nothwendig, und ein Betrieb ist nicht nur mit Kette, sondern auch mit Seil denkbar, wie aus folgenden Betrachtungen hervorgehen wird, deren Mittheilung deshalb nicht überflüssig, sondern gerechtfertigt erscheinen mag. Doch will ich gleich von vornherein bemerken, dass Differentialflaschenzüge, welche in Werkstätten u. s. w. gebraucht werden sollen, nach wie vor die Knaggen behalten

1) Weisbach, a. a. O. p. 57.

2) Goodeve, The elements of mechanism. 4. ed. p. 156. London 1874.

werden; es handelt sich hier um einen Demonstrationsapparat, dessen Betrachtung aber eine deutlichere Einsicht in die Bedingung der Selbstsperrung und überhaupt eine vollständigere Kenntniss auch der zum praktischen Dienste bestimmten Maschine zu geben geeignet ist.

Die Fig. 4 Taf. I bringt die Einrichtung des Differentialflaschenzugs in Erinnerung, wobei bemerkt wird, dass nur grösserer Deutlichkeit wegen die frei herabhängende Seilschleife seitlich geschoben ist, während sie gewöhnlich senkrecht herabhängt.

Die Rollen sind glatt am Umfange, ohne Hervorragungen oder Knaggen angenommen. Sind  $r_1$  und  $r_2$  die Halbmesser der Rinnen der auf der gemeinsamen Axsitzenden Scheiben der Doppelrolle, ist  $l$  die Seillänge zwischen entsprechenden Berührungspunkten der Doppel- und der losen Rolle,  $2\lambda$  aber die von der Berührungsstelle an der Doppelrolle aus gerechnete Länge der frei herabhängenden Schleife, endlich  $s$  das Gewicht der Längeneinheit des Seiles, so übt das Seil durch sein Gewicht ein Drehmoment  $s(l - \lambda)(r_1 - r_2)$  aus. Dieses Moment ist veränderlich mit der Entfernung der losen von der festen Doppelrolle oder mit der Höhe, auf welcher jeweils die Last befindlich ist; es kann Null sein oder das eine wie das andere Vorzeichen haben. Da es keinen vernünftigen Sinn hat, bei kleiner Last ein schweres Seil (grosses  $s$ ) zu verwenden, demnach  $s(l - \lambda)$  verhältnissmässig klein (namentlich bei den später zu erwähnenden Messungen, bei welchen man  $l$  und  $\lambda$  möglichst wenig verschieden macht) und  $r_1 - r_2$ , absolut genommen, klein ist, so kann das veränderliche Drehmoment des Seilgewichts gegen die Momente der sonstigen an dem Differentialflaschenzuge thätigen Kräfte vernachlässigt werden.

$L$  bezeichne die Last,  $G_2$  das Gewicht der losen Rolle, einschliesslich ihres Lagers und des Lasthakens und  $1/m$  das Verhältniss des Halbmessers der losen Rolle zur Sehne des vom Seil umfasten Bogens, welches von  $1/2$  nie merklich verschieden ist. Nennt man dann  $Q = (L + G_2)/m$ , so folgt aus der mit Vernachlässigung aller passiven Bewegungswiderstände aufgestellten Momentengleichung die Bedingung:



(A)

$$P \cong Q \cdot \frac{r_1 - r_2}{r_1}$$

für das Heben, Ruhen oder Senken der Last. Hier ist ein Zug  $P$  nur an dem einen von der grösseren Scheibe der Doppelrolle herabgehenden Theile der frei herabhängenden Seilschleife gedacht, — die Spannung im anderen Theile Null angenommen. Diese elementare und ungenaue Theorie gibt die in der Figur zur besseren Unterscheidung mit  $Q_1$  und  $Q_2$  bezeichneten Spannungen gleich, jede  $Q$ .

Bei regelmässigem Gange der Maschine wird das Seil von der einen Scheibe der Doppelrolle ab- und der anderen Scheibe aufgewunden, ferner läuft es, ohne zu gleiten, um die lose Rolle. Die zu beachtenden Bewegungswiderstände sind also Seilbiegungswiderstand an den Scheiben der oberen Doppelrolle und an der losen Rolle und ferner Zapfenreibung an beiden Rollen. Wie eingangs erwähnt, suchte man bisher beiden Widerständen dadurch Rechnung zu tragen, dass man annahm, „in jedem Falle, wo ein Seil sich um eine Rolle schlingt, sei die Spannung des ablaufenden (ziehenden) Seiles gleich der  $k$ -fachen Spannung des auflaufenden (gezogenen) Seiles.“<sup>1)</sup> Es mag hier der früheren Bemerkung noch beigefügt werden, dass in der Theorie des Differentialflaschenzuges die Zahl  $k$  gleich gross genommen wird für die oberen, mit grossen Widerständen, Knaggen versehenen Rollen wie für die unteren glatten Rollen; in Wirklichkeit wird also eine Art von Mittelwerth von  $k$  angewendet, der den beiden so verschiedenen Umständen ausgleichend angepasst wird.

Die Theorie, welche ich hier vorschlage, ersetzt die wirkliche Zapfenreibung und den Seilbiegungswiderstand durch eine vergrösserte Reibung am Umfange des Zapfens, welche proportional dem Drucke angenommen wird, mit welchem der Zapfen in sein Lager gepresst wird. Das ist freilich nur eine Annahme, welche aber, wenn man sie in ihren Consequenzen verfolgt, keinen Widerspruch mit dem herbeiführt, was über die Seilbiegung bekannt ist. Die Proportionalitätszahl, die ich mit  $\mu$  bezeichne und vergrösserten Zapfen-

1) Weisbach-Hermann, a. a. O. p. 44.

reibu  
bestim  
gewöhn  
biegun  
den k  
Zapfe  
Versu  
Genau  
der A  
druck  
keine  
schre  
Nenn  
lager  
 $G_1$ ,  
herab  
 $P$ , se  
drück  
ah d  
Mon

$P$   
oder  
(B)  
welc  
ding

$Q$   
oder  
(C)

welc  
ding  
sein  
ver  
letz



reibungscoëfficient nennen will, lässt sich aus Versuchen bestimmen. Man muss erwarten, dass sie beträchtlich den gewöhnlichen Zapfenreibungscoëfficient übertrifft, weil der Seilbiegungswiderstand, der am Umfange der Rolle auftritt, auf den kleineren Halbmesser  $\varrho_1$  (resp.  $\varrho_2$  für die lose Rolle) des Zapfens reducirt wird. Vorgreifend erwähne ich, dass meine Versuche, obgleich sie leider keinen Anspruch auf grosse Genauigkeit erheben können, doch insoweit eine Bestätigung der Annahme liefern, als bei sehr verschiedenen Zapfendruckten oder Belastungen des um die Rollen gehenden Seils keine nach einer Richtung mit Zunahme der Belastung fortschreitende Aenderung des Coëfficienten  $\mu$  erkannt wird. Nennt man das Gewicht der Doppelrolle, ohne ihr Axenlager, aber einschliesslich des ganzen Gewichtes des Seiles,  $G_1$ , bleibt man bei der Annahme, es wirke an der frei herabhängenden Schleife nur in einem Theile die Kraft  $P$ , so wird der Zapfen der Doppelrolle in sein Lager gedrückt mit der Kraft  $2Q + G_1 + P$ , während der Zapfendruck an der losen Rolle  $2Q - G_2$  ist. Hiernach stellt sich die Momentengleichung

1) für Heben (Aufwärtsbewegung) der Last:

$$Pr_1 + Q_2 r_2 > Q_1 r_1 + \mu \varrho_1 (2Q + G + P) + \mu \varrho_2 (2Q - G_2),$$

oder:

$$(B) \quad P > Q \frac{r_1 - r_2}{r_1 - \mu \varrho_1} + \mu \frac{2Q (\varrho_1 + \varrho_2)}{r_1 - \mu \varrho_1} + p \frac{G_1 \varrho_1 - G_2 \varrho_2}{r_1 - \mu \varrho_1},$$

welche Bedingung, für  $\mu = 0$ , wie es sein muss, in die Bedingung (A) übergeht.

2) Für Senken (Abwärtsbewegung) der Last:

$$Q_1 r_1 > Q_2 r_2 + Pr_1 + \mu \varrho_1 (2Q + G_1 + P) + \mu \varrho_2 (2Q - G_2),$$

oder:

$$(C) \quad P < Q \frac{r_1 - r_2}{r_1 + \mu \varrho_1} - \mu \frac{2Q (\varrho_1 + \varrho_2)}{r_1 + \mu \varrho_1} - \mu \frac{G_1 \varrho_1 - G_2 \varrho_2}{r_1 + \mu \varrho_1},$$

welche Bedingung, für  $\mu = 0$ , wie es sein muss, in die Bedingung (A) übergeht.

Der Unterschied  $G_1 \varrho_1 - G_2 \varrho_2$  wird gewöhnlich so klein sein, dass sein Product mit dem achten Bruch  $\mu/(r_1 \mp \mu \varrho_1)$  vernachlässigbar ist. Zur Vereinfachung werden also die letzten Glieder in (B) und (C) fortgelassen werden.

Hiernach wird die Bedingung für das Abwärtsrollen der Last am Differentialflaschenzuge:

$$(C') \quad P < Q \frac{r_1 - r_2}{r_1 + \mu q_1} - \mu \cdot \frac{2Q(q_1 + q_2)}{r_1 + \mu q_1}.$$

Sobald:

$$(D) \quad r_1 - r_2 \leq 2\mu(q_1 + q_2)$$

ist, wird  $P$  negativ. Dieses besagt: Damit die Last an der Maschine herabrollen kann, darf an dem Theile der frei herabhängenden Seilschleife, der von der grösseren Scheibe der Doppelrolle abgeht, nach abwärts gar nicht mehr gezogen werden, sondern es muss im Gegentheile ein Zug ( $P$ ) (siehe Fig. 4 Taf. I) an dem anderen Theile der Seilschleife nach abwärts gerichtet angebracht werden. Formt man die Bedingung (D) um in:

$$(D') \quad \mu \geq \frac{r_1 - r_2}{2(q_1 + q_2)},$$

so lässt sich der gefundene Satz aussprechen: ist der vergrösserte Zapfenreibungscoefficient gleich oder grösser als der durch die Summe der Zapfendurchmesser dividirte Unterschied der Halbmesser der Scheiben der Differentialrolle, so findet kein freiwilliges Abrollen der Last statt, sondern ein besonderer Zug  $P'$  muss dieses Abrollen bewirken.

Aus den Maassen des von Ball<sup>1)</sup> beschriebenen Differentialflaschenzuges berechnet sich der der Bedingung (D') genügende Minimalwerth des vergrösserten Zapfenreibungscoefficienten zu 0,1072, während aus den angeführten Kraftmessungen ein beträchtlich höherer Werth jenes Coefficienten abgeleitet werden kann.

Die Erfüllung der Bedingung (D') genügt nicht, um eine Selbstsperrung vorauszusehen. Denn Hebung und Senkung der am Differentialflaschenzuge hängenden Last ist nicht nur möglich durch Auf- und Abwickeln des endlosen Seiles um die Rollenscheibe unter gleichzeitiger Drehung dieser, sondern kann auch derart erfolgen, dass das Seil über die fest stehen bleibende Doppelrolle rutscht oder gleitet, — was

1) Ball, Experimental Mechanics p. 114.

eben durch die Knaggen und die besondere Form der Kette an den üblichen Weston'schen Differentialflaschenzügen verhindert wird.

Dem Abrutschen kann aber vorgebeugt werden auch an glatten Rollen (ohne Hervorragungen) und bei Anwendung eines Seiles (keiner Kette). Die bekannten Gesetze der Seilreibung geben hier Aufschluss. Damit der Seiltheil  $Q_1$  trotz des Zuges  $P$  nicht von der grösseren Scheibe, und Seiltheil  $Q_2$  trotz des Zuges  $P'$  nicht von der kleineren Scheibe der Differentialrolle abgleite, muss sein:

$$Q_1 < P \cdot c^{\phi} \quad \text{und} \quad Q_2 < P' \cdot c^{\phi}$$

oder:

$$(E) \quad P > Q \cdot c^{-\phi} \quad \text{und} \quad P' > Q' \cdot c^{-\phi},$$

wo  $\phi$  die Länge des vom Seile umfassten Bogens (in Halbmessermaass) und  $c$  eine Constante  $e^f$  bedeutet, mit  $e$  Basis der natürlichen Logarithmen und  $f$  Coëfficient der gleitenden Reibung des Seiles gegen den Stoff der Rolle.

Die Bedingung (E) sagt aus: Damit an einem Differentialflaschenzuge ohne Knaggen oder sonstige besondere Bewegungshindernisse am Umfange der Rolle ein Abwärts-gleiten der Last nicht statthabe, müssen beide Theile der frei herabhängenden Schleife gespannt sein,  $P'$  darf auch, wenn die Last gehoben werden soll, nicht Null oder gar negativ, sondern muss positiv sein. Dieser Anforderung genügt man durch ein Gewicht, welches man in die frei herabhängende Schleife einbringt, und das eine Spannung  $S$  beider Schleifentheile hervorbringt, deren kleinster Werth noch  $Q \cdot c^{-\phi}$  übertreffen muss. Will man stets mit dem Minimum der erforderlichen Schleifenspannung arbeiten, so ist das Spanggewicht je nach der Belastung (wechselnd mit  $Q$ ) zu verändern.

Die Spannung  $S$  kann so stark gedacht werden, dass die Theile  $P$  und  $P'$  der losen Schleife, also diese selbst, trotz der Gegenwirkungen  $Q_1$  und  $Q_2$  abrutschen, die Last somit durch Gleitung bei der übermässigen Spannung gehoben wird. Damit das nicht erfolge, muss sein:

$$(F) \quad P < Q \cdot c^{\phi} \quad \text{und} \quad P' < Q' \cdot c^{\phi}, \quad \text{d. h.} \quad S < Q \cdot c^{\phi}.$$

Damit also Gleiten oder Abrutschen weder in der einen noch in der anderen Richtung erfolgen kann, muss die Spannung  $S$  in der Schleife in den Grenzen  $Q.c^0$  und  $Q.c^{-0}$  bleiben.

Ist  $S$  grösser als der Minimalwerth  $Q.c^{-0}$ , so fördert das die Hebung und erschwert die Senkung der Last auf dem normalen Wege durch Auf- und Abwickeln am Seil um die drehenden Rollen.

Nachdem erkannt wurde, dass an beiden Theilen der frei herabhängenden Schleife des Differentialflaschenzuges ohne Knaggen Kräfte thätig sein müssen beim Heben wie beim Senken der Last, ist die Momentengleichung frisch aufzustellen. Diese Kräfte bestehen aus der beiden Schleifenhälften gemeinsamen Spannung  $S$  und einem Extrazuge; beim Heben der Last in dem mit  $P$  bezeichneten, von der grösseren Scheibe der Doppelrolle abgehenden Theile; beim Senken der Last in dem mit  $P'$  bezeichneten, von der kleineren Scheibe der Doppelrolle abgehenden Theil. Bezeichnet man diese Extrazüge mit  $II$ , resp.  $II'$ , so ist:

$$P = S + II \quad \text{und} \quad P' = S + II',$$

wobei aber  $S$  nicht denselben Werth zu haben braucht beim Heben und beim Senken. Vorläufig sollen die Bezeichnungen  $P$  und  $P'$  beibehalten werden.

Die Momentengleichung wird nun

1) für Heben (Aufwärtsbewegung der Last:

$$Pr_1 + Q_2 r_2 > P'r_2 + Q_1 r_1 + \mu q_1 (2Q + G_1 + P + P') + \mu q_2 (2Q - G_2),$$

oder:

$$(G) \quad P > Q \frac{r_1 - r_2}{r_1 - \mu q_1} + \mu \frac{2Q(q_1 + q_2)}{r_1 - \mu q_1} + P' \frac{r_2 + \mu q_1}{r_1 - \mu q_1}.$$

wenn das letzte Glied  $\mu(G_1 q_1 - G_2 q_2) / (r_1 - \mu q_1)$ , wie berechnet, gleich fortgelassen wird.

2) für Senken (Abwärtsbewegung) der Last:

$$Q_1 r_1 + P' r_2 > Q_2 r_2 + P r_1 + \mu q_1 (2Q + G_1 + P + P') + \mu q_2 (2Q - G_2),$$

oder unter statthafter Vernachlässigung des Gliedes:

$$(H) \quad P > Q \frac{r_2 - r_1}{r_2 - \mu q_1} + \mu \frac{2Q(q_1 + q_2)}{r_2 - \mu q_1} + P' \frac{r_1 + \mu q_1}{r_2 - \mu q_1}.$$

In dem Ausdrucke (G), der für Heben gilt, ist für  $P'$  und in (H), der für Senken gilt, ist für  $P$  die das Gleiten verhindernde Spannung  $S$  zu setzen. Nimmt man hierfür den Minimalwerth  $Q \cdot c^{-\phi}$ , so gestalten sich die Ausdrücke nach leicht übersehbarer Umformung zu:

$$(G') \quad \frac{P}{Q} (r_1 - \mu \varrho_1) > 2\mu (\varrho_1 + \varrho_2) + (r_1 - r_2) + c^{-\phi} \cdot (r_2 + \mu \varrho_1),$$

$$(H') \quad \frac{P'}{Q} (r_2 - \mu \varrho_1) > 2\mu (\varrho_1 + \varrho_2) - (r_1 - r_2) + c^{-\phi} \cdot (r_1 + \mu \varrho_1).$$

Während in dem für Aufwärtsbewegung geltenden Ausdrucke (G') nur positive Glieder vorkommen, ist in dem für Abwärtsbewegung geltenden (H') ein negatives Glied. Da, wie bereits gefunden,  $P'$  stets positiv sein muss,  $(r_2 - \mu \varrho_1)$  aber auch positiv ist, und der Ueberschuss der linken Seite gegen die rechte so klein, als man nur will, angenommen werden darf, so muss sein:

$$r_1 - r_2 \leq 2\mu (\varrho_1 + \varrho_2) + c^{-\phi} \cdot (r_1 + \mu \varrho_1),$$

oder  $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$  nehmend und umstellend:

$$(J) \quad \frac{r_2}{r_1} \geq 1 - \left[ 4\mu \frac{\varrho}{r_1} + c^{-\phi} \cdot \left( 1 + \mu \frac{\varrho}{r_1} \right) \right].$$

Damit ist eine Bedingung gefunden: das Halbmesser-Verhältniss der Scheiben der Doppelrolle darf nicht unter eine gewisse Grenze sinken. Lästig wird diese Bedingung nicht werden, da doch eine starke Uebersetzung gewöhnlich beabsichtigt wird, die nur durch die Annäherung des Verhältnisses  $r_2/r_1$  an die Einheit erreicht wird. Für einige äusserste Werthe berechnet sich nach (J), wenn  $\varrho/r_1 = 1/12$  angenommen wird:

$\mu =$	$\frac{0,24}{0,8}$	$\frac{0,48}{0,8}$
$c^{-\phi} =$	$\frac{0,4}{0,4}$	$\frac{0,4}{0,4}$
$\frac{r_2}{r_1} >$	0,104	0,008
	0,512	0,424

Bei dem von Ball zu seinen Messungen benutzten Differentialflaschenzuge ist  $r_2/r_1 = 0,875$ , bei einem von mir untersuchten ist annähernd, und bei einem Modelle (ohne Knaggen), mit dem ich arbeitete, ist genau  $r_2/r_1 = 0,9$ . Die Bedingung hinsichtlich des kleinst zulässigen Halbmesserverhältnisses

ist stets erfüllt, auch wenn man die ungünstigste der möglichen Werthe von  $\mu$  und  $c^{-\phi}$  annimmt. Auch die ältere Theorie führt zu einem Minimalwerthe des Halbmesserverhältnisses  $r_2/r_1 = n$ ; man braucht für den gegebenen Werth von  $k$  nur den für  $\eta' = 0$  geltenden Werth (p. 113) von  $n$  zu suchen, denn  $\eta'$ , der Nutzeffect beim Senken der Last, darf nicht positiv werden, sondern kann höchstens gleich Null sein, wenn Selbstsperrung bestehen soll. Mit Weisbach's Coëfficient  $k = 1,06$  berechnet sich  $n = r_2/r_1$  zu 0,889, also erheblich grösser als nach der hier vertretenen Theorie. Mir scheint (siehe oben) Weisbach's  $k$  zu klein; wählt man  $k = 1,15$ , so folgt  $n = 0,756$ , also immerhin noch gross.

Ersetzt man nun in (G) den Zug  $P'$  und in (H) den Zug  $P$  durch die Spannung  $S$ , so berechnen sich leicht die für das Heben, resp. Senken erforderlichen Extrazüge  $\Pi = P - S$  und  $\Pi' = P' - S$ , welche derselben Spannung  $S$  in der frei herabhängenden Schleife zugehören. Nämlich:

1) Extrazug für das Heben der Last:

$$(K) \quad \Pi > Q \frac{2\mu(\varrho_1 + \varrho_2) + (r_1 - r_2)}{r_1 - \mu\varrho_1} + S \frac{2\mu\varrho_1 - (r_1 - r_2)}{r_1 - \mu\varrho_1} \quad \text{und:}$$

2) Extrazug für das Senken der Last:

$$(L) \quad \Pi' > Q \frac{2\mu(\varrho_1 + \varrho_2) - (r_1 - r_2)}{r_2 - \mu\varrho_1} + S \frac{2\mu\varrho_1 + (r_1 - r_2)}{r_2 - \mu\varrho_1}.$$

Aus (K) und (L) folgt:

Mit wachsender Belastung (zunehmendem  $Q$ ) und gleichbleibender Spannung  $S$  in der Schleife nimmt der für das Heben erforderliche Extrazug  $\Pi$  jedenfalls zu, der zum Senken nöthige Extrazug  $\Pi'$  aber nimmt zu, bleibt unverändert oder nimmt ab, je nachdem  $(r_1 - r_2)$  kleiner, gleich oder grösser ist als  $2\mu(\varrho_1 + \varrho_2)$ . Vergleiche Bedingung (D). Der erste Fall liegt vor an dem von Ball beschriebenen, ferner an einem neuen Differentialflaschenzuge englischen Ursprungs, mit dem ich arbeitete, und an dem noch zu beschreibenden Modelle, das ich für diese Untersuchung anfertigen liess.

Bleibt die Belastung dieselbe, wird aber die Spannung  $S$  in der frei herabhängenden Seilschleife grösser, so wird unbedingt der für das Senken erforderliche Extrazug  $\Pi'$

wachsen. Hingegen nimmt der für das Heben erforderliche Extrazug  $\Pi'$  mit wachsender Spannung ab, wenn  $2\mu\varrho < (r_1 - r_2)$ , was für die mir bekannten Maschinen immer erfüllt ist, und nicht im Widerspruche mit der Bedingung (D), nämlich  $2\mu(\varrho_1 + \varrho_2) \geq (r_1 - r_2)$  steht.

An den für die Anwendung bestimmten Differentialflaschenzügen wird die bei dem Modelle durch ein Gewicht in der freien Schleife hervorgebrachte Spannung  $S$  vertreten durch die Bewegungshindernisse, welche durch das Eingreifen der einzelnen Glieder der Kette in die Knaggen und die Drehung der Kettenglieder um die Verbindungsstellen derselben hervorgebracht werden. Die ersetzte Spannung  $S$  wird desto bedeutender, je grösser die erwähnte, dem Abgleiten der Kette bereiteten Widerstände und Hindernisse sind. Diese sollen nun ausreichen für die grösstzulässige Belastung des Flaschenzuges, sind also bei minder grosser Belastung überflüssig gross. Demgemäss wird dann der zum Senken der Last erforderliche Zug grösser als nöthig wäre. Da man es hier mit einem rein passiven Bewegungswiderstande zu thun hat, der nicht eine der Lasterhebung förderliche Arbeit verrichten kann, so wird durch die übermässigen Bewegungshindernisse der für das Heben nöthige Zug nicht verringert, während bei dem Modelle (Differentialflaschenzug ohne Knagge und mit Seil) bei übermässiger Spannung der für das Heben erforderliche Zug kleiner wird; das Sinken des überschüssigen Spannungsgewichts liefert eine für die Lasthebung nützliche Arbeit.

Zur Prüfung der entwickelten Theorie des Differentialflaschenzuges diente mir ein besonders angefertigtes Modell. Die Doppelrolle, ebenso die lose, Last tragende Rolle, ist aus Nussbaumholz glatt abgedreht und polirt, die Zapfen sind von Stahl und gehen in eisernen Lagern. Das Gewicht der Doppelrolle ohne Scheere beträgt 125 g, das Gewicht des benutzten Seils, einer guten, glatten Hanfschnur von 314 cm Länge, ist 10 g, also  $G_1 = 135$  g. Die Halbmesser der zwei Scheiben der Doppelrolle sind  $r_1 = 40$  mm,  $r_2 = 36$  mm, die Halbmesser  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  der beiden Zapfen sind 3,1 mm. Die Zapfen wurden einmal, dann nicht wieder, mit gutem



Oel reichlich geschmiert, — für die zur Verwendung gekommenen Versuche muss die Befettung als gering bezeichnet werden. Die Spannung  $S$  in der frei herabhängenden Seilschleife wurde hervorgebracht durch ein angebrachtes Gewicht, an der Scheere einer kleinen, vorzüglich gearbeiteten, in gut geölten Spitzen gehenden, losen Rolle aus Messing ( $67\frac{1}{2}$  g wiegend), welche in der Schleife hing. Die Extrazüge  $II$  und  $II'$  wurden vermittelt durch eine Schnur, die an den entsprechenden Theil der Seilschleife angehakt war, deren anderes Ende an dem Gestelle fest gemacht war, und die eine lose Hülfsrolle aus Messing und mit vernachlässigbaren Bewegungswiderständen trug, an welche das Spannungsgewicht gehängt wurde. Da die Schnurtheile, welche diese lose Rolle umgeben, ziemlich genau parallel liefen, ist der Extrazug die Hälfte des angehängten Gewichts, vermehrt um die Hälfte des Gewichts (71 g) der messingenen Hülfsrolle.

Ehe ich über die Messungen des vergrößerten Zapfenreibungscoefficienten  $\mu$  berichte, theile ich die zur Auswerthung der Seilreibung oder der Grösse  $c^*$  angestellten Versuche mit.

Das Seil wurde an beiden Enden mit Gewichten belastet und halbumfassend um eine Scheibe (abwechselnd die kleine oder die grosse) der Doppelrolle gelegt, die Rolle dann festgehalten, dass sie nicht drehen konnte, und nun, während die Belastung des einen Seilendes constant  $p$  blieb, die Belastung des anderen Seilendes so weit gesteigert, auf  $q$ , resp.  $q'$ , dass eine durch zusätzliches Ziehen mit der Hand bereits begonnene Bewegung des Abgleitens gerade noch unterhalten und möglichst wenig beschleunigt wurde, oder dass das Abgleiten von der Ruhe aus begann. Die derselben Belastung  $p$  entsprechenden Zugkräfte  $q$  und  $q'$  für das Unterhalten und für das Beginnen des Abgleitens wurden sehr verschieden gefunden. Nach dem bekannten Unterschiede der Coëfficienten der Reibung des Holzes für den Ruhe- und den Bewegungswiderstand war dieses Ergebniss vorauszusehen. Die Ermittlung von  $q'$  war sehr unsicher, da die kleinste Erschütterung oft von Einfluss war, ferner

muss  
da di  
wie s  
muss  
— es  
der  
erken

zu m  
Reib

liefer  
späte  
stark  
war.  
wohl  
Die  
zusta  
unge  
such  
bess  
sung  
ich  
eben  
halb

Gramm

das  
ring  
größ  
neu  
ner

musste bei grösseren  $p$  die Auswerthung von  $q'$  unterbleiben, da die Festigkeit des Seils durch so sehr grosse Zugkräfte, wie sie nöthig gewesen wären, ernstlich gefährdet erscheinen musste. Auch die Auswerthung von  $q$  ist nicht sehr sicher, — es liess sich namentlich Ungleichheit der Beschaffenheit der Schnur und auch der Rolle an verschiedenen Stellen erkennen. Die Berechnung ist einfach nach:

$$q = p \cdot c^{\theta}, \text{ wobei } \theta = \pi$$

zu machen, und aus  $c = e^f$  ist der Coëfficient  $f$  der gleitenden Reibung der Hanfschnur gegen das Holz leicht ableitbar.

Die ersten Messungen mit der noch neuen Schnur lieferten ein beträchtlich höheres Ergebniss, als es viel später mit der bereits häufig gebrauchten, gelegentlich starken Spannungen ausgesetzt gewesenem Schnur der Fall war. Die Schnur war durch den Gebrauch weniger rauh, wohl auch die Rinnen der Holzrolle noch glätter geworden. Die Anfangsversuche lieferten im Mittel für den Bewegungszustand  $c'' = 2,29$  oder  $f = 0,264$  und für die Ruhereibung ungefähr  $c_1'' = 3,35$  oder  $f_1 = 0,385$ . Da die neueren Versuche mit der abgescheuerten Schnur nicht nur unter sich besser übereinstimmen, sondern auch den schliesslichen Messungen am Differentialflaschenzuge besser entsprechen, theile ich eine kleine Reihe solcher mit, bemerkend, dass hier, ebenso später, in  $p$  und  $q$ , resp.  $q'$  schon jeweils 5 g als das halbe Gewicht der Schnur einbegriffen sind.

Gramm	$p$	124	324	624	1024	1524	2124
	$q$	223 $\frac{1}{4}$	566	1064 $\frac{1}{2}$	1756	2591	3679
	$q'$	459	1186	2502	4337	—	—
	$c''$	1,801	1,747	1,706	1,715	1,700	1,724
	$c_1''$	3,702	3,660	4,010	4,235	—	—

Mittelwerthe  $c'' = 1,732$   
entsprechend  $f = 0,1748$

$c_1'' = 3,902$   
 $f_1 = 0,4334$

Durch Vergleich mit den ersten Messungen ergibt sich, dass die abgescheuerte glatte Schnur einen erheblich geringeren Reibungscoëfficienten der Bewegung, hingegen einen grösseren Reibungscoëfficienten der Ruhe hat, als die noch neue, rauhere Schnur auf der wahrscheinlich unvollkommenen glatten Holzfläche.

Eine andere Reihe von Messungen wurde mittelst des zusammengestellten Modells des Differentialflaschenzuges ausgeführt. Die Last  $2p$  wurde an die lose Rolle gehängt (deren Gewicht in  $2p$  begriffen ist), in die Mitte der frei herabhängenden Seilschleife ein Gewicht eingehängt und dieses so gewählt, dass, nachdem das Gleiten durch einen Zusatzzug mit der Hand eingeleitet war, es gerade noch unterhalten wurde. Dabei wurde abwechselnd das Gleiten in der einen Richtung (Senken), dann in der entgegengesetzten (Heben der Last) bewirkt. Diese Versuche sind bequemer, weil ein Festhalten der Rolle, um deren Drehung zu hindern, nicht nöthig ist.  $p$  und  $q$  sind in Grammen angegeben:

$p$	$q$	$c^{\pi}$	$p$	$q$	$c^{\pi}$
144	234	1,625	624	1057	1,694
234	402	1,718	1057	1818	1,720
428	734	1,715	1064	1734	1,630
734	1213	1,653	1734	2872	1,656
746	1234	1,654	1801	2234	1,717
1234	2105	1,706	2234	3740	1,674

Mittelwerth  $c^{\pi} = 1,680$ , woraus  $f = 0,1727$ .

Es ist kaum zu zweifeln, dass bei diesen Versuchen die Schnur noch abgenutzt war, und dass daher das kleinere Mittelergebniss rührt.

Die Versuche über den Werth des vergrößerten Zapfenreibungscoefficienten  $\mu$ , der in der Theorie des Differentialflaschenzugs die wichtigste Rolle spielt, wurden in der Art gemacht, wie es mittelst des sogenannten Tribometers geschieht. Bald um die grössere, bald um die kleinere Scheibe der Doppelrolle, auch um die am Differentialflaschenzuge als lose Rolle dienende Scheibe, die dann natürlich als feste Rolle verwendet wurde, legte ich die Schnur, sodass ziemlich genau die Hälfte auf jeder Seite herabhing, und brachte zunächst bekannte, gleich grosse Lasten an die Enden; das halbe Gewicht der Schnur (5 g) ist in dieser Belastung  $B$  schon eingerechnet. Dann wurde in die eine Wagschale ein Uebergewicht  $U$  in Gestalt von Bleischrotkörnern gelegt, entweder bis ein Abrollen, welches durch Zug mit der Hand eingeleitet war, gerade noch unterhal-

ten und möglichst wenig beschleunigt wurde, oder auch bis es von der Ruhe aus begann. Obgleich für Metall auf Metall, hier Stahlzapfen in eisernem Lager, die Reibungscoefficienten der Ruhe und der Bewegung meist als ganz gleich angenommen werden, zeigten die Versuche einen recht grossen Unterschied. Ich muss aber erinnern, dass es sich um den vergrösserten Zapfenreibungscoefficient handelt, oder dass der Seilbiegungswiderstand in den gefundenen Werthen von  $\mu$  enthalten ist. Darin unterscheiden sich die Messungen von den Tribometerversuchen.

Trotz aller Sorgfalt konnte ich gut übereinstimmende Resultate nicht erhalten und musste wahrnehmen, dass bei Wiederholung unter scheinbar ganz gleichen Umständen die Werthe recht merklich schwankten. Die Berechnung ist einfach. Wenn  $B$  die beiderseitig gleiche Belastung einschliesslich des halben Schnurgewichts,  $G$  das Gewicht der Rolle selbst (natürlich ohne die Scheere) und  $U$ , bezw.  $U'$  (aus der Ruhe) das Uebergewicht, ferner  $r$  den Rollen- und  $\varrho$  den Zapfenhalbmesser bedeuten, findet man den vergrösserten Zapfenreibungscoefficienten  $\mu$ , bezw.  $\mu'$  (Coefficient der Ruhereibung) aus:

$$\mu(G+2B+U) \cdot \varrho = Ur,$$

$\varrho$  ist immer 3,1 mm,  $G$  in den nachstehend vollständig mitgetheilten Messungen gleich 125 g.

Beobachtet				Berechnet	
$B$	$U$	$U'$	$r$	$\mu$	$\mu'$
124 g	8 g	15 g	40 mm	0,271	0,499
124	10	15	36	0,303	0,449
205	13	17	40	0,306	0,398
255	14	18	40	0,278	0,356
305	18	21	36	0,278	0,323
505	27	32	40	0,300	0,354
624	32	38	40	0,294	0,348
755	43	50	36	0,298	0,345
1005	52	68	40	0,307	0,398
1124	56	73	40	0,298	0,385
1205	60	80	40	0,298	0,395
2005	88	110	40	0,269	0,334
2124	92	135	40	0,243	0,395

Das Mittel aus den mitgetheilten und zwölf weiteren, bei ähnlichen Belastungen angestellten Messungen gibt:

$$\mu = 0,281 \qquad \mu' = 0,385.$$

Wie zu erwarten stand, übertreffen diese vergrösserten Zapfenreibungscoefficienten (die Seilbiegungswiderstände einschliessend) beträchtlich den einfachen Zapfenreibungscoefficient, der im Mittel 0,08 sein wird.

Die schliesslichen Messungen von  $II$  und  $II'$  der zum Heben und Senken einer am Differentialflaschenzuge hängenden Last erforderlichen Kräfte bei verschiedenen innerhalb der zulässigen Werthe bleibenden Spannungen  $S$  wurde in der schon angegebenen Weise am Modell ausgeführt. Bei der Berechnung liess ich den sehr geringen Reibungswiderstand der sorgfältigst gearbeiteten, gut geölten, in Spitzen gehenden kleinen Messingrollen, welche die Spannung  $S$  wie den Zug  $II$  oder  $II'$  vermitteln, ausser Acht. Die Messungen sind wenig genau und sicher. Ist durch einen Zug die Bewegung in einem Sinne eingeleitet und lässt sich auf eine kürzere Strecke eine Beschleunigung unzweifelhaft wahrnehmen, so tritt doch häufig im weiteren Verlaufe eine Stockung ein, oder auch im Gegentheile plötzlich eine grosse Beschleunigung. Ich war bemüht, den kleinsten Zug zu finden, der die Hebung oder Senkung noch bewirkt. Meist konnte man den Zug  $II$  oder  $II'$  um einige Gramm vermehren oder vermindern, ohne auffallend den Erfolg zu ändern. War nach dieser bemerkten geringen Empfindlichkeit der Messungen Abweichung zwischen beobachteten und berechneten Werthen vorherzusehen, so war ich doch überrascht, wie wenig genau die Versuche sich durch die Rechnung darstellen lassen, wenn man den oben angegebenen Mittelwerth für  $\mu'$  anwendet. Für jede Beobachtung lässt sich (ziemlich mühsam) ein Werth des vergrösserten Zapfenreibungscoefficienten finden, mit dessen Hülfe die Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung erzwungen werden kann. Man darf wohl annehmen, dass sich wirklich dieser Coefficient von Fall zu Fall etwas ändert, wenn andere Theile des Seils sich biegen und andere Theile gerade aneinander reiben. Gleichwohl wäre eine so künstlich herbeigeführte Ausglei-

chung zwischen Rechnung und Beobachtung ohne Werth. Nach mancherlei Versuchen habe ich gefunden, die Gesammtheit der Messungen lasse sich am besten wiedergeben, d. h. die mittlere Abweichung werde am geringsten, wenn man dem vergrösserten Zapfenreibungscoefficienten den Werth 0,37 beilegt, also nahezu den Mittelwerth, welchen die besonderen Messungen für den vergrösserten Coëfficienten der Reibung der Ruhe ergaben. Dass dieser und nicht jener als Bewegung hier anzuwenden ist, folgt daraus, dass bei dem Modelle wie bei den im grossen angewendeten Differentialflaschenzügen (wenigstens bei Handbetrieb) nicht stetig, sondern (um die Hand zu wechseln) aussetzend gezogen wird, also immer wieder von der Ruhe ausgegangen wird.

Nachstehend theile ich von sehr vielen ausgeführten Beobachtungen die zuletzt angestellten mit, welche am besten stimmen und in wenigen Tagen vollendet wurden, sodass binnen dieser Zeit eine erhebliche Aenderung der Reibungs- und Steifheitsverhältnisse nicht anzunehmen ist.

In der Zeile *Q* ist die halbe Last (einschliesslich Gewicht der losen Rolle), in Zeile *S* die Spannung (der Hälfte von Spannungsgewicht plus kleiner Rolle), in den Zeilen *II* und *II'* die zum Heben, resp. Senken erforderlichen Extrazüge angegeben, und zwar sind die berechneten Zahlen kenntlich an dem Decimalbruche.

So unvollkommen, trotz allem Fleisse und aller Mühe, die Ergebnisse, der Natur dieser Versuche nach, sind, liefern sie (einige innerhalb der Fehlergrenzen liegende Widersprüche abgerechnet) eine Bestätigung der Theorie, lassen insbesondere die p. 122 hervorgehobenen Sätze hervortreten über den Einfluss, den veränderte Spannung in der frei herabhängenden Schleife auf die zum Heben oder Senken derselben Last erforderlichen Kräfte ausübt, wie auch die Veränderung dieser Kräfte bei gleichbleibender Spannung und wechselnder Last. Zur bequemerem Uebersicht sind die Beobachtungen in Gruppen zusammengestellt und einzelne wiederholt angeführt. Man sieht, dass bei gleich bleibender Last mit wachsender Spannung *II* ab- und *II'* erheblich zunimmt, Gruppe I—VI, und dass bei gleich bleibender Spannung mit

wachsender Last  $II$  und  $II'$  zunehmen, letzteres sehr langsam, Gruppe VIII—X. Ferner, dass der zum Senken erforderliche Extrazug  $II'$  gleich jenem zum Heben nöthige sein kann, Versuch 3 in Gruppe X, dass aber ersterer sogar beträchtlich grösser sein kann als letzterer, Versuch 3 in Gruppe I; 1, II; 4, III; 5, IV; 2 und 3, VII.

Der Wirkungsgrad einer Maschine ist das Verhältniss der von ihr geleisteten Arbeit, ausschliesslich der sogenannten passiven Widerstandsarbeit, zu der ihr überlieferten oder an sie übertragenen Arbeit. Sind die Bewegungswiderstände so geregelt, dass gerade noch Selbstsperrung besteht, so wird, wie schon besprochen, die Hälfte der überlieferten Arbeit durch die Widerstände verzehrt, und der Wirkungsgrad, wie er oben definnirt wurde, ist  $\frac{1}{2}$ . So muss man den Wirkungsgrad an dem Modelle des Differentialflaschenzuges beim Heben der Last finden, wenn die Spannung gerade den kleinsten zulässigen Werth hat. Ist die Spannung grösser als nothwendig, so wirkt ein Theil des Spannungsgewichtes durch sein Sinken noch nützlich für das Heben der Last, denn das Uebermaass der Spannung ist am grösseren Hebelarme  $r_1$  der beabsichtigten Bewegung förderlich und nur am kleineren Hebelarme  $r_2$  dieser gegenwirkend. In diesem Falle wird also der Wirkungsgrad (beim Heben) grösser als  $\frac{1}{2}$ . Da der Extrazug  $II$  an dem Modelle auf einen 20mal so langen Weg  $[2r_1/(r_1 - r_2)]$  geübt werden muss, als die Last steigt, so ist dieser Wirkungsgrad:

$$W = \frac{1 \cdot L}{20 \cdot II} = \frac{Q}{10 II} \quad (\text{da } Q = \frac{1}{2}L).$$

Die so berechneten Werthe des Wirkungsgrades sind in den Zeilen  $W$  der nachfolgenden Tabellen angegeben; dabei sind die berechneten Extrazüge  $II$  benutzt, nicht die weniger gut vergleichbaren, viel ungenaueren, beobachteten. Man sieht leicht,  $W$  ist desto grösser, je übertriebener die Spannung  $S$  ist, und steigt für excessive Spannungen bis zu 0,62. Selbstverständlich können kleinere Werthe als  $\frac{1}{2}$  hier nicht vorkommen.

Um die Abhängigkeit des Wirkungsgrades  $W$  von Last



(oder  $Q$ ) und Spannung allgemeiner zu überblicken, muss man in der Formel:

$$W = \frac{1 \cdot L}{2 \frac{r_1}{r_1 - r_2} \cdot II} = \frac{r_1 - r_2}{r_1} \cdot \frac{Q}{II}$$

den Werth von  $II$  (Minimalwerth), wie er aus (K) folgt, einsetzen und erhält:

$$(M) \quad W = \frac{r_1 - r_2}{r_1} \cdot \frac{r_1 - \mu \varrho_1}{2\mu(\varrho_1 + \varrho_2) + (r_1 - r_2) + \frac{S}{Q}(2\mu\varrho_1 - (r_1 - r_2))}.$$

Man sieht, wenn die Spannung die zulässig kleinste  $= Q \cdot c^{-\phi}$  ist, oder wenn sie an derselben Maschine überhaupt proportional der Last geändert wird, dann ist der Wirkungsgrad beim Heben von der Belastung unabhängig. Bei dem Modelle liesse sich diese Proportionalität herstellen, nicht aber bei den Differentialflaschenzügen mit Knaggen. Denn das was die Spannung  $S$  der freien Schleife dort ersetzt, der Widerstand gegen das Abgleiten, ist nicht mit der Belastung  $L$  proportional; dieser Widerstand ist bei geringen Belastungen verhältnissmässig grösser als bei grosser Belastung. Die Formel (M) lehrt aber:

1) Wenn die Spannung  $S$  nicht proportional mit  $Q$  ist, sondern constant bleibt, während die Last zunimmt, oder auch langsamer zunimmt als die Last, so wird der Wirkungsgrad kleiner für grössere Last. Denn das Glied im Nenner, welches das Verhältniss  $S/Q$  als Factor enthält, ist bei den üblichen Differentialflaschenzügen negativ, da bei diesen Maschinen  $2\mu\varrho_1 < (r_1 - r_2)$  ist. Die Versuche der Gruppen VIII, IX und X zeigen das deutlich. Freilich könnte man  $r_1 - r_2$  auch so klein machen, dass  $2\mu\varrho_1$  gleich oder gar grösser als  $(r_1 - r_2)$  ist. Im ersten Falle bliebe der Wirkungsgrad  $W$  bei jeder Belastung und bei jeder Spannung derselbe, im zweiten Falle würde er mit wachsender Last zunehmen.

2) Bleibt die Belastung ungeändert, wird aber die Spannung  $S$  (oder der sie vertretende Bewegungswiderstand) grösser, so wird der Wirkungsgrad  $W$  grösser, bleibt ungeändert oder wird kleiner, je nachdem  $2\mu\varrho_1$  kleiner,

gleich oder grösser ist als  $(r_1 - r_2)$ . Die erste dieser drei Möglichkeiten gilt für das Modell, wie für die untersuchten Arbeitsmaschinen. Die Versuche der Gruppen I bis VII zeigen deutlich das Anwachsen des Wirkungsgrades  $W$  mit der wachsenden Spannung  $S$ , entsprechend derselben Last.

Der Nutzeffect einer Maschine ist zu unterscheiden vom Wirkungsgrade derselben. Es ist das Verhältniss der geleisteten nützlichen Arbeit zur aufgewendeten. Dabei ist in rein technischen Fragen die Hebung der losen Rolle, an welcher die Last hängt, eigentlich keine Nutzarbeit, bei physikalischer Betrachtung aber muss diese, wie in meinen Rechnungen geschieht, mit gezählt werden. Die an dem Modell des Differentialflaschenzugs beim Lastheben aufgewendete Arbeit besteht aber aus zwei Theilen, der Ausübung des Zugs  $II$  auf eine gewisse Strecke und in einem Verluste an verfügbarer Arbeit, indem das Spannungsgewicht  $2S$  in der losen Schleife um ebensoviel herabsinkt, als die Last gehoben wird. Wird deren Hebung gleich 1 gesetzt, so ist also die aufgewendete Arbeit an dem Modelle:

$$20 \cdot II + 1 \cdot 2S,$$

und der Nutzeffect des Hebens:

$$N = \frac{1 \cdot L}{20 \cdot II + 2S} = \frac{Q}{10II + S}.$$

Die so berechneten Werthe finden sich in den Zeilen  $N$ . Sie schwanken zwischen engen Grenzen, und ihr Mittelwerth ist nahezu 0,38, wie Ball für einen grossen Differentialflaschenzug fand, allerdings mit Vernachlässigung des Gewichtes der losen Rolle.

Um die Abhängigkeit des Nutzeffects  $N$  beim Heben von der Grösse der Last (oder  $Q$ ) und der Spannung allgemeiner zu erkennen, muss man in die Formel:

$$N = \frac{1 \cdot L}{\frac{2r_1}{r_1 - r_2} II + 2S} = \frac{Q}{\frac{r_1}{r_1 - r_2} II + S}$$

den durch (K) angegebenen Werth von  $II$  (Minimalwerth) einsetzen. Nach einigen einfachen Zusammenziehungen erhält man:

(N)

unabh  
kleinst  
Falle r

A

1)

sonder  
sie wer  
gröss  
Grupp

2)

nung  
so wir  
pen I

F

stellen  
ders  
terer  
positiv  
ist ab  
selbst

Arbei  
Weg  
wend  
Der

Die  
wech  
nutz  
erhäl

(O)

S se

$$(N) \quad N = \frac{r_1 - \mu q_1}{2\mu(q_1 + q_2) + (r_1 - r_2) + \frac{S}{Q} \cdot \mu q_1}.$$

Auch der Nutzeffect beim Heben ist für das Modell unabhängig von der Last, wenn die Spannung stets ihren kleinsten zulässigen Werth  $Q \cdot c^{-\phi}$  hat oder auch in jedem Falle mit der Last proportional ändert.

Aus der Formel (N) folgt aber weiter:

1) Ist die Spannung  $S$  nicht proportional mit der Last, sondern ist sie constant, während die Last wächst, oder nimmt sie weniger rasch zu als die Last, so wird der Nutzeffect  $N$  grösser mit zunehmender Last. Siehe Versuche der Gruppen VIII bis X.

2) Bleibt die Belastung ungeändert, wird aber die Spannung (oder der sie vertretende Bewegungswiderstand) grösser, so wird der Nutzeffect  $N$  kleiner. Siehe Versuche der Gruppen I bis VII.

Für das Senken der Last am Differentialflaschenzuge stellen sich Wirkungsgrad  $W'$  und Nutzeffect  $N'$  ganz anders als für das Heben. Ersterer ist immer negativ, letzterer kann nur ganz ausnahmsweise am Modelle Null oder positiv gemacht werden. Der Wirkungsgrad beim Senken ist aber negativ, weil ja ohne die Widerstände die Last von selbst herabfallen würde, aber sogar noch eine besondere Arbeit (Zug  $II'$  abwärts auf die  $2r_1/(r_1 - r_2)$  mal so grosse Wegstrecke als die Lastsenkung beträgt, ausgeübt) aufzuwenden ist, um das Niederlassen der Last zu bewerkstelligen. Der Wirkungsgrad  $W'$  berechnet sich für das Modell:

$$W' = -\frac{1 \cdot L}{20 \cdot II'} = -\frac{Q}{10 II'}.$$

Die Werthe sind in den Zeilen  $W'$  gegeben, sind sehr wechselnd in Grösse, aber immer beträchtlich. Unter Benutzung des durch (L) ausgedrückten Minimalwerths von  $II'$  erhält man die allgemeine Formel:

$$(O) \quad W' = -\frac{r_1}{r_1 - r_2} \cdot \frac{r_2 - \mu q_1}{2\mu(q_1 + q_2) - (r_1 - r_2) + \frac{S}{Q} 2\mu q_1 + (r_1 - r_2)}.$$

Besteht Proportionalität zwischen  $S$  und  $Q$  (wie wenn  $S$  seinen Minimalwerth hat), so ist der Wirkungsgrad  $W'$

des Senkens unabhängig von der Grösse der Last und jener der Spannung. Besteht aber diese Proportionalität nicht (an den Arbeitsmaschinen), so wird der Absolutwerth des Wirkungsgrades  $W'$  grösser, wenn bei constant bleibender (oder langsamer wachsender) Spannung die Last wächst, und kleiner, wenn bei constant bleibender Last die Spannung grösser wird. Dies unter der zutreffenden Voraussetzung, dass  $2\mu(\rho_1 + \rho_2) > (r_1 - r_2)$  ist. Siehe Bedingung (D). Bestätigung für den ersten Satz geben die Versuche der Gruppen VIII bis X, und man sieht, wie rasch der Absolutwerth von  $W'$  wächst. Für den zweiten Satz sind die Versuche der Gruppen I bis VII zu vergleichen.

Dass die Absolutwerthe von  $W'$  immer beträchtlich sind, lehrt, dass das Senken der Last mittelst Differentialflaschenzug ganz ausnehmend theuer erkaufte wird. Da aber der grosse Vorzug dieser Maschine eben in der Sicherheit des Senkens beruht, in der Selbstsperrung und damit Vermeidung von Unglücksfällen, welche sich bei den gewöhnlichen Flaschenzügen durch freiwilliges Abstürzen der Last bei Nachlassen des Zugs nicht selten ereignen, so ist der aufgewendete Preis doch nicht als zu hoch zu bezeichnen.

Die Nutzarbeit beim Senken der Last am Modelle (knaggenlosen) des Differentialflaschenzuges besteht, physikalisch gesprochen, in der Hebung des Spannungsgewichts  $2S$  in der losen Schleife, weniger der gleich grossen Senkung der Last. Der Nutzeffect  $N'$  beim Senken (in diesem physikalischen Sinne genommen) ist also das Verhältniss der eben genannten Arbeit zur aufgewendeten, nämlich zur Ausübung des Zuges  $II'$  auf die 20fache Länge (am Modelle) oder:

$$N' = \frac{1 \cdot (2S - L)}{20 \cdot II'} = \frac{S - Q}{10 II'}.$$

Diese Werthe sind in den Zeilen  $N'$  der nachfolgenden Tabellen angegeben, sie sind sehr verschieden, bei mässigen Spannungen negativ, bei übertrieben grosser Spannung aber positiv.

Unter Benutzung des durch (L) ausgedrückten Minimalwerths von  $II'$  erhält man die allgemeine Formel:

$$(P) \quad N' = \frac{r_1 \cdot (r_2 - \mu q_1)}{r_1 - r_2} \cdot \frac{\left(\frac{S}{Q} - 1\right)}{2\mu(q_1 + q_2) - (r_1 - r_2) + \frac{S}{Q}[2\mu q_1 + (r_1 - r_2)]}.$$

Im Falle der Proportionalität der Spannung mit der Last ist  $N'$  wieder unabhängig von beiden Grössen. Ist die Spannung  $S$  (wie gewöhnlich) kleiner als die halbe Last  $Q$ , so ist der Senkungsnutzeffect  $N'$  negativ, ist die Spannung gleich der halben Last, so ist  $N'$  Null, und ist gar, sehr überflüssiger Weise, die Spannung in der frei herabhängenden Schleife grösser als die halbe Last, so ist  $N'$  positiv. Dieser Nutzeffect  $N'$ , wie er hier berechnet, hat keinen Sinn für die Knaggenmaschine, da bei dieser die Ueberwindung der Widerstände keine verfügbare Arbeit schafft, wie am knaggenlosen Modelle die Hebung des Spannungsgewichts eine ist. Differentiirt man den Ausdruck (P) nach  $Q$ , beziehungsweise nach  $S$ , so erkennt man leicht:

1) Bei constant bleibender Spannung wird  $N'$  kleiner, wenn die Last wächst, (vergleiche die Versuche der Gruppen VIII bis X); von anfangs positivem Werth bei übertrieben grosser Spannung sinkt  $N'$  auf negative, dem Absolutwerthe nach zunehmende Grössen bei wachsender Last.

2) Bei constant bleibender Belastung wird  $N'$  grösser, wenn die Spannung wächst; (vergleiche die Versuche der Gruppen I bis VII.)

Zusammenstellung der Versuche mit dem knaggenlosen Modelle des Differentialflaschenzuges.

	L				
$Q$	524 $\frac{1}{2}$	524 $\frac{1}{2}$	524 $\frac{1}{2}$	1114 $\frac{1}{2}$	1114 $\frac{1}{2}$
$S$	330	401	725	700	950
$II$	100	100	88	211	203
	101,4	98,3	84,1	215,7	204,7
$II'$	69	83	138 $\frac{1}{2}$	143	191
	68,4	81,3	130,7	145,2	190,3
$W$	0,52	0,53	0,62	0,51	0,53
$N$	0,39	0,38	0,32	0,39	0,37
$W'$	-0,77	-0,65	-0,38	-0,77	-0,59
$N'$	-0,28	-0,15	+0,14	-0,285	-0,08

II.				III.			
Q	340	340	340	546	546	546	546
S	344	244	209	550	474	349	250
II	{ 58 60,0	{ 65 64,4	{ 68 66,0	{ 94 96,5	{ 101 99,9	{ 102 105,4	{ 107 109,7
II'	{ 68 67,9	{ 48 49,8	{ 46 43,5	{ 110 108,5	{ 95 94,8	{ 69 72,2	{ 53 54,4
W	0,57	0,50	0,51	0,56	0,55	0,52	0,50
N	0,36	0,38	0,39	0,36	0,37	0,47	0,40
W'	-0,50	-0,68	-0,80	-0,50	-0,57	-0,75	-1,00
N'	+0,0006	-0,19	-0,30	+0,004	-0,08	-0,27	-0,54
IV.				V.			
Q	1055	1055	1055	1055	1055	1055	1055
S	600	698	814	944	989	1058	1058
II	{ 205 206,8	{ 204 202,5	{ 194 197,4	{ 193 191,7	{ 191 189,8	{ 188 185,7	{ 188 185,7
II'	{ 128 126,1	{ 145 143,7	{ 170 164,8	{ 190 187,9	{ 200 196,4	{ 210 208,9	{ 210 208,9
W	0,51	0,52	0,53	0,55	0,56	0,57	0,57
N	0,395	0,39	0,38	0,37	0,36	0,36	0,36
W'	-0,84	-0,73	-0,64	-0,56	-0,54	-0,50	-0,50
N'	-0,36	-0,25	-0,14	-0,06	-0,03	+0,001	+0,001
VI.				VII.			
Q	361	361	361	2550	2550	2550	2550
S	243	279	314	1593	2016	2016	2016
II	{ 66 $\frac{1}{2}$ 69,1	{ 66 $\frac{1}{2}$ 67,5	{ 66 66,0	{ 502 493,7	{ 480 475,1	{ 480 475,1	{ 480 475,1
II'	{ 51 50,0	{ 58 56,5	{ 65 62,8	{ 334 330,7	{ 406 407,1	{ 406 407,1	{ 406 407,1
W	0,52	0,53	0,55	0,51	0,54	0,54	0,54
N	0,39	0,38	0,37	0,39	0,38	0,38	0,38
W'	-0,72	-0,64	-0,57	-0,77	-0,62	-0,62	-0,62
N'	-0,24	-0,14	-0,08	-0,29	-0,13	-0,13	-0,13
VIII.				IX.			
Q	555	555	555	1055	1305	1506	1728
S	394	559	734	1058	1058	1058	1058
II	{ 102 105,4	{ 100 98,2	{ 97 90,5	{ 188 185,7	{ 245 242,0	{ 283 286,4	{ 335 333,9
II'	{ 81 81,5	{ 105 110,3	{ 140 141,9	{ 210 208,9	{ 211 $\frac{1}{2}$ 213,1	{ 214 216,5	{ 218 220,1
W	0,52	0,56	0,61	0,57	0,54	0,53	0,52
N	0,39	0,36	0,34	0,36	0,38	0,39	0,40
W'	-0,08	-0,50	-0,39	-0,50	-0,61	-0,70	-0,79
N'	-0,20	+0,004	+0,12	+0,001	-0,11	-0,21	-0,30
X.				XI.			
Q	228	361	482	555	615	790	873
S	279	279	279	559	559	559	559
II	{ 40 38,1	{ 66 $\frac{1}{2}$ 67,5	{ 94 94,3	{ 100 98,2	{ 109 111,4	{ 145 150,1	{ 163 168,5
II'	{ 57 54,25	{ 52 56,5	{ 57 58,5	{ 105 110,3	{ 109 111,3	{ 114 114,3	{ 114 115,7
W	0,60	0,53	0,51	0,56	0,55	0,52	0,52
N	0,345	0,38	0,40	0,36	0,37	0,38	0,39
W'	-0,42	-0,64	-0,82	-0,50	-0,55	-0,69	-0,75
N'	+0,09	-0,14	-0,35	+0,004	-0,05	-0,20	-0,27

Die für einen knaggenlosen Differentialflaschenzug durchgeführte und an einem solchen Modelle geprüfte Theorie gestattet Ausdehnung und Anwendung auf die mit Knaggen versehenen Maschinen. Gleichwohl erscheint eine experimentelle Prüfung an den Differentialflaschenzügen erwünscht. Um eine solche vornehmen zu können, habe ich mir einen neuen Differentialflaschenzug in der üblichen Ausführung, mit einer angeblichen Tragfähigkeit von 5 Centnern verschafft. Die Durchmesser der Rinnen der Doppelrolle sind etwa 85 und 75 mm, die Breite des Kettengliedes ist 17 mm; nach gewöhnlichem Verfahren sind bei Berechnungen die Durchmesser der Rollen um die Breite der Kettenglieder zu vermehren. Darnach ergibt sich  $\frac{1}{4} \cdot ((r_1 - r_2)/r_1)$  zu 1:20,4. Durch directe Messung des Weges, um den die lose Rolle sinkt, wenn die Kette in der freien Schleife um 1 m gezogen wird, wurde das Geschwindigkeitsverhältniss 1:19,25 gefunden und dieses soll benutzt werden, weil die Messung der Durchmesser der Rollen nicht sehr genau ausführbar war. — Die Kette ist 7,54 m lang und wiegt 5000 g. Die lose Rolle mit dem Lashaken wiegt  $G_2 = 1290$  g; die Doppelrolle ohne Axenlager und Haken wiegt 2400 g, also  $G_1 = 7400$  g.

Zunächst bemühte ich mich, den vergrösserten Zapfenreibungscoefficient zu bestimmen, und zwar für die glatte, lose Rolle, wie für die mit Knaggen versehene Doppelrolle. Waren schon die entsprechenden Messungen bei dem sorgfältig geglätteten Holzmodell unter Anwendung eines glatten Seils nicht sehr genau, so gelangte ich mit der Kette zu gar keinem brauchbaren Ergebniss. Die Kette ist offenbar an ihren einzelnen Stellen zu ungleichförmig. Aus den sehr voneinander abweichenden Messungszahlen ein Mittel zu nehmen, scheint mir nicht zulässig. Als ich die Kette über die Knaggenrolle legte, um  $\mu$  zu ermitteln, kam ich noch weniger zum Ziele. Der Grund wird deutlich in den Versuchen mit dem ganz zusammengestellten Differentialflaschenzug. Ich versuchte, an diesem durch angehängte Gewichte den zur Hebung oder Senkung der Last erforderlichen und gerade ausreichenden Zug zu bestimmen. Es kamen aber immer Stockungen vor und häufig so erhebliche, dass förm-



lich „todte Punkte“ entstanden, über welche durch stetig vergrösserten Zug nicht wegzukommen war; man musste erst eine Rückwärtsbewegung einleiten und dann mit einer gewissen Geschwindigkeit die schwierige Stelle überschreiten. Dergleichen Stockungen rühren von mangelhafter Form der Kette her; durch den Gebrauch (namentlich bei starker Belastung) dehnen sich die Glieder und passen nicht mehr in die Hervorragungen am Rande der Rolle, sie schleissen stark ab und passen nicht mehr gut in die Rinnen. Dieses Verderben der Kette ist eine allgemeine Klage gegen die Knaggenmaschinen. Auffallend ist nur, dass der ganz neue Apparat, aus einer Werkstätte ersten Ranges bezogen, diese Mängel schon zeigte, die übrigens, nebenbei bemerkt, nicht so gross sind, dass schon für die technische Benutzung der Maschine Beanstandungen zu machen wären. Ich versuchte schliesslich, die verdächtigen Kettenglieder durch Hammerschläge zu richten, habe aber damit nichts gebessert, sondern eher das Gegentheil bewirkt.

Nicht nur mit angehängten Gewichten suchte ich die nöthigen Zugkräfte zu messen, sondern auch mittelst eines Federdynamometers, dass ich in die Leine eingebunden hatte, durch welche der mit der Hand geübte Zug auf die betreffende Kette der Schleife des Flaschenzuges übertragen wurde. Das Verfahren erwies sich als unbrauchbar, an schwierigen Stellen, die überhaupt noch durch stetigen Zug überwunden werden konnten, stiegen die Dynamometerangaben plötzlich auf das Drei- und Vierfache und schwankten überhaupt beständig in erheblichem Grad.

Wenn ich die Versuche zur Bestimmung von  $\mu$  ganz unterdrücke, so will ich doch vier, die wenigstens unbefriedigenden Messungen am zusammengestellten Differentialflaschenzug mittheilen, wiederhole aber, dass sie mir geringes Vertrauen einflössen, obgleich ich Mittelwerthe aus einem halben Dutzend Beobachtungen anführe.

Um das von der Kette ausgeübte Drehmoment sicher vernachlässigen zu können, wurde stets Sorge getragen, dass etwa die eine Hälfte der Kette die frei herabhängende Schleife bildete, die andere Hälfte die beiden Rollen verband.

### Versuche mit dem knaggentragenden grossen Differentialflaschenzuge.

Angehängte Last.	Zug zum Heben.	Zug zum Senken.
0	770 g	620 g
10000 g	3000 „	1450 „
23000 „	5600 „	2200 „
46000 „	10000 „	6000 „

Berechnet man die Nutzeffecte als das Verhältniss der im Heben, resp. Senken der Last (einschliesslich des Gewichts der losen Rolle) geleisteten, resp. verbrauchten Arbeit zu der durch den Zug an der Kettenschleife ausgeübten Arbeit (19,25 fachen Weg), so findet man für die vier obenstehenden Fälle:

$\eta$	0,09	0,19	0,23	0,24
$\eta'$	-0,11	-0,40	-0,57	-0,41.

Für die Hebung der Last also einen mit dieser sicher wachsenden Nutzeffect. Aus einer grossen Anzahl von Versuchen mit einer Belastung von 200 kg, deren Ergebnisse so sehr schwankten, dass ich sie nicht im einzelnen angeben will, berechneten sich Nutzeffecte  $\eta$ , die zwischen 0,21 und 0,40 liegen.

Der Weston'sche Differentialflaschenzug dürfte aus der Praxis bald verdrängt und ersetzt werden durch andere Hebezeuge, die einer gleichgliedrigen, genau den Knaggen angepasste Kette nicht bedürfen. Sehr gelobt wird der Archimedische Flaschenzug, D. R.-Patent 1163, von Collet u. Engelhard in Offenbach, der eigentlich mehr eine Windtrommel als ein Flaschenzug ist, und der Schraubenflaschenzug mit Drucklager, D. R.-Patent 10611, von E. Becker in Berlin. Wenn von letzterem gesagt wird, er gewähre für das Aufziehen der Last bei selbstthätiger Hemmung 0,65 Nutzeffect, so ist das aus allgemeinen Gründen als ein Irrthum zu bezeichnen, denn keine selbstsperrende Maschine kann mehr als 0,50 Nutzeffect geben.

Aschaffenburg, 9. August 1881.

# IX. Refractionstheorie auf geometrischer Grundlage; von Dr. A. Kerber in Chemnitz.

## I. Die Hauptformeln.

Es sei (Fig. 1)  $m$  der Mittelpunkt der Erde,  $c$  ein Ort auf ihrer Oberfläche,  $bb'$  die Grenze der Atmosphäre, deren Höhe durch  $H$  bezeichnet wird,  $am$  die durch den Fixstern  $a$  gelegte Axe des von der Atmosphäre dargestellten optischen Systems. Ferner sei  $ac$  ein Strahl,

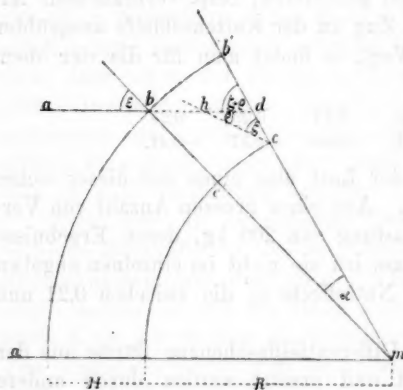


Fig. 1.

der mit der Anfangsrichtung  $abh$  im Punkte  $b$  unter dem Einfallswinkel  $\varepsilon$  die Grenze der Atmosphäre trifft, in einer Curve nach  $c$  gelangt und von der letzten Luftschicht, deren Brechungsquotient  $= n'$ , in die Richtung  $hc$  gebrochen wird, sodass  $\zeta$  die scheinbare Zenithdistanz und  $\rho$  die astronomische Refraction des Strahles darstellt.

Das wichtige Verhältniss der Refraction zu einer kleinen Zenithdistanz  $\rho_0 : \zeta_0$ , welches nach den Besselschen Refractionstabellen für den mittleren Luftzustand 57,3" betragen soll, bezeichne ich der Kürze halber durch  $z_0$ ;  $n_0$  ist der Brechungsquotient der Luft im Normalzustande:

für Linie B . .	1,000 293 50,
" " C . .	293 83,
" " D . .	294 70 u. s. w.;

$n^m$  derjenige des mittleren Luftzustandes (50° F. 29,6 Z. engl., oder 9,3° C. 751,8 mm):

für Linie B . .	1,000 280 76,
„ „ C . .	281 08,
„ „ D . .	281 91 u. s. w.

Die Bezeichnungen  $H^m$ ,  $\rho^m$ ,  $z_0^m$ ,  $b^m$ ,  $t^m$  beziehen sich auf denselben Luftzustand, für den die Bessel'schen Refractions-tafeln entworfen sind.

§ 1. Die Höhe der Atmosphäre. — Für die Höhe der Atmosphäre habe ich schon früher<sup>1)</sup> die Formel abgeleitet. Nach der Theorie von Gauss, Helmholtz war:

die hinterseitige Brennweite . . . .  $F' = \frac{R}{z_0}$ ,

die vorderseitige Brennweite . . . .  $F = \frac{n' R}{z_0}$ ,

die Entfernung des Hauptpunktes von  $m$   $mh = \frac{(n'-1) R}{z_0}$ ,

„ „ „ „ „  $c$   $ch = \left(\frac{n'-1}{z_0} - 1\right) R$ ,

die Höhe der Atmosphäre . . . .  $H = 2 \left(\frac{n'-1}{z_0} - 1\right) R$ .

So ergab sich beispielsweise für  $n^m - 1 = 0,000\ 282$  (Linie D) und  $z_0^m = 57,3''$ :  $H^m = \text{ca. } 190 \text{ km}$ . Es wird sich aber zeigen, dass diese numerische Bestimmung von  $n^m - 1$  und  $z_0^m$  nicht richtig ist, dass weder bei der Einstellung astronomischer Objecte der gewählte Brechungsquotient massgebend ist, noch das Verhältniss der Strahlenbrechung zu einer kleinen Zenithdistanz  $57,3''$  betragen kann. Im Folgenden betrachte ich daher die „Refractionsconstanten“  $n^m - 1$  und  $z_0^m$  als unbekannt und werde sie durch Rückschlüsse aus den Messungsdaten in höheren Zenithdistanzen zu bestimmen suchen.

§ 1. Die wirksame Oeffnung der Atmosphäre. — Man denke sich nach dem Ein- und Austrittspunkte des Strahles  $abc$  die Radien  $mb$ ,  $mc$  gezogen; so ist der von ihnen begrenzte Theil der Atmosphäre die vom Strahle durchlaufene wirksame Oeffnung des optischen Systems. Ich bezeichne sie durch  $\alpha$ .

1) Kerber, Wied. Ann. 14. p. 122. 1881.

Dieselbe ist leicht zu berechnen. Nach der Entwicklung der Differentialgleichung der astronomischen Refraction<sup>1)</sup> sind für zwei beliebige Luftschichten die Producte aus dem Sinus des Einfallswinkels, des Radius und des Brechungsquotienten einander gleich, also für die erste und die letzte Schicht:

$$(R + H) \cdot \sin \varepsilon = n' R \sin \zeta, \quad \sin \varepsilon = \frac{n' \sin \zeta}{1 + H/R},$$

und aus  $\triangle mbd$  ergibt sich dann als wirksame Oeffnung:

$$(1) \quad \alpha = \zeta + \varrho - \varepsilon = \zeta + \varrho - \arcsin \frac{n' \sin \zeta}{1 + H/R}.$$

**§ 3. Die Hauptcurve der Atmosphäre.** — Es seien (Fig. 2) in den verschiedenen Zenithdistanzen  $h_0, h_1, h_2 \dots h$  die Schnittpunkte der Tangenten, die man sich im Ein- und Austrittspunkte des Strahles  $abc$  an die Lichtcurve

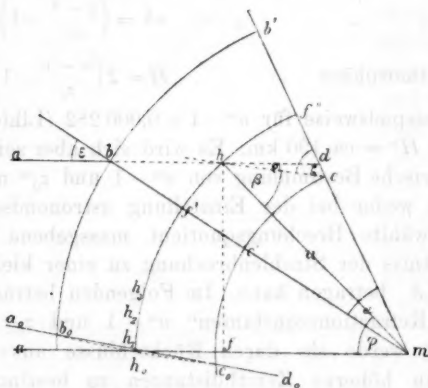


Fig. 2.

gelegt denken kann;  $h_0$  ist uns bereits bekannt, es ist der sogenannte Hauptpunkt, für welchen Gegenstand und Bild identisch werden, weil er zugleich der Ziel- und Divergenzpunkt eines durch die Atmosphäre

gehenden, gegen die Axe sehr schwach geneigten<sup>2)</sup> Strahlenbüschels ist; sein Abstand vom Erdcentrum wird bestimmt durch  $mh_0 = (n' - 1) R/z_0$ .

Mit Rücksicht auf  $h_0$  nenne ich die durch jene Schnitt-

1) Bruhns, die astronomische Strahlenbrechung, p. 86. Leipzig 1861.

2) Gauss, Dioptrische Untersuchungen. p. 2. Göttingen 1840.

punkte gelegte Curve  $h_1 h_2 h_3 \dots$  die Hauptcurve der Atmosphäre. Ihre Gleichung wird gewonnen durch folgende Betrachtung.

Nach § 2 ist  $\sin \varepsilon = n' R \sin \zeta / (R + H)$ , mithin der Abstand des Eintrittspunktes  $b$  von der Axe  $= n' R \sin \zeta$ , also auch das Perpendikel aus dem Schnittpunkte der Tangenten:

$$(2) \quad hf = n' R \sin \zeta;$$

und nennt man  $u$  den Radius vector,  $q$  den Polarwinkel der Hauptcurve  $h_0 h$ , so folgt aus  $\Delta m h f$ :

$$(3) \quad u = \frac{hf}{\sin q} = \frac{n' R \sin \zeta}{\sin q}.$$

Nun wird aber  $h$  der Mittellinie der wirksamen Oeffnung jedenfalls sehr nahe liegen. Denn wenn die Lichtcurve bei so colossaler Länge und der allmählichen Dichtigkeitsabnahme innerhalb der Atmosphäre nur wenig von einer Geraden abweicht, so kann dieselbe ohne Fehler als Kreisbogen und die Tangenten als gleich betrachtet werden, sodass die Bogen  $hf'$ ,  $hf''$  und somit die beiden Theile der wirksamen Oeffnung nahe gleich sind. Man hat daher unter allen Umständen genähert:

$$(4) \quad q = \varepsilon + \frac{\alpha}{2}, \text{ d. i. nach (1): } q = \frac{\zeta + \varphi + \varepsilon}{2},$$

oder, wenn man genauer das Verhältniss des Winkels  $b m h$  zur wirksamen Oeffnung durch  $\eta$  ( $\eta \mu \iota \nu \varsigma$ ) bezeichnet:

$$(5) \quad q = \varepsilon + \eta \cdot \alpha = \eta \cdot (\zeta + \varphi) + (1 - \eta) \cdot \varepsilon.$$

Die Polargleichung der Hauptcurve  $h_0 h$  wird also, nach Bestimmung der Refractionsconstanten  $n' - 1$ ,  $z_0$  und  $\eta$  gewonnen durch den Algorithmus:

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{H}{R} = 2 \left( \frac{n' - 1}{z_0} - 1 \right), & \sin \varepsilon = \frac{n' \sin \zeta}{1 + H/R}, \\ q = \eta \cdot (\zeta + \varphi) + (1 - \eta) \cdot \varepsilon, & \text{nahe } \frac{\zeta + \varphi + \varepsilon}{2}, \\ u = \frac{n' \sin \zeta}{\sin q}. \end{cases}$$

**§ 4. Refractionsformel.** — Nennt man  $\beta$  den Winkel zwischen dem Radius der Hauptcurve und der Endrichtung des Strahles  $abc$ , so ist  $q = \beta + \varphi$ , mithin nach (3):

$$(7) \quad u = \frac{n' \sin \zeta}{\sin (\beta + \varrho)},$$

wo Winkel  $\beta$  aus *Amhc* bestimmt wird durch:

$$\sin \beta = \frac{R \sin \zeta}{u}, \quad \cos \beta = \sqrt{1 - \left( \frac{R \sin \zeta}{u} \right)^2}.$$

Entwickelt man in (7) die Winkelfunction, wobei  $\cos \varrho$  mit Rücksicht auf die Strahlenbrechung in der Nähe des Horizontes, bei der Empfindlichkeit der Formel, nicht = 1 gesetzt werden darf, und führt statt  $\sin \beta$  und  $\cos \beta$  die Werthe ein, so erhält man die Refractionsformel:

$$(8) \quad \varrho = \frac{(n' - \cos \varrho) \sin \zeta}{\sqrt{\left[ \left( \frac{u}{R} \right)^2 - \sin^2 \zeta \right]}},$$

welche, nach Ermittlung der Refractionsconstanten  $n' - 1$ ,  $z_0$ ,  $\eta$  und eines Näherungswerthes von  $\varrho$  (§ 5) bestimmt ist durch den Algorithmus:

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{H}{R} = 2 \left( \frac{n' - 1}{z_0} - 1 \right), & \sin \varepsilon = \frac{n' \sin \zeta}{1 + H/R}, \\ \varphi = \eta \cdot (\zeta + \varrho') + (1 - \eta) \cdot \varepsilon, & \text{nahe } \frac{\zeta + \varrho' + \varepsilon}{2}, \\ \frac{u}{R} = \frac{n' \sin \zeta}{\sin \varphi}. \end{cases}$$

Diese Formel gilt ganz allgemein für jede mögliche Constitution der Atmosphäre:  $n' - 1$  bestimmt den Luftzustand an der Erde,  $z_0$  nach § 1 die Höhe der Atmosphäre eines Ortes und  $\eta$  das Verhältniss des Winkels *bmh* zur wirksamen Oeffnung, d. h. die Länge der Tangenten und somit die Abstufung der Dichtigkeit innerhalb der Atmosphäre, welche ebenfalls mit der Lage des Ortes wechselt.<sup>1)</sup> Ermittelt man daher  $n' - 1$ ,  $z_0$  und  $\eta$  in jedem Falle, so wird die Formel die ganze Scala der astronomischen Refractionen mit voller Treue widerspiegeln. Sie kann insofern als ein allgemeiner Ausdruck für die localen Eigenthümlichkeiten der Strahlenbrechung betrachtet werden.

**§ 5. Die ersten Näherungswerthe.** — Da der Polarwinkel der Hauptcurve  $\varphi$  und die Zenithdistanz nur

1) Bruhns, a. a. O. p. 181: Dass für verschiedene Oerter der Erde verschiedene Theorien anwendbar sind, ist nicht unmöglich.



wenig differiren, so setze ich in erster Näherung:  $\sin \varphi = \sin \zeta$ , also:

$$(10) \quad \frac{u}{R} \left( \text{d. i. } \frac{n' \sin \zeta}{\sin \varphi} \right) = n', \quad \varrho = \frac{(n'-1) \sin \zeta}{\sqrt{[n'^2 - \sin^2 \zeta]}},$$

wofür in kleineren Zenithdistanzen, wegen  $n'^2 = 1,000 \dots$ ,

$$(11) \quad \varrho = (n' - 1) \operatorname{tg} \zeta$$

genommen werden kann, und erhalte dann für  $n^m - 1 = 0,00028 \dots$  folgende Refractionswerthe:

	$\zeta = 30^\circ$	$60^\circ$	$70^\circ$	$80^\circ$
$\varrho'$	33,3''	100,3''	158,3''	324,5''
Bessel . . .	33,3	99,7	157,3	316,5
Bradley . .	33,0	98,4	155,5	315,1
Mayer . . .	33,1	99,1	156,6	316,0
Delambre . .	33,3	99,5	157,1	316,3
Groombridge	33,2	99,2	156,7	316,5
Derselbe	33,2	99,3	156,8	316,0
Piazzi . . .	33,1	98,9	157,8	316,1
Bürg . . . .	33,7	101,0	159,6	322,8

### § 6. Entwicklung der Formel für $\varrho_0$ bis $\varrho_{70}$ . —

Setzt man in der Refractionsformel (8)  $1 - \cos^2 \zeta$  statt  $\sin^2 \zeta$  und bezeichnet  $(u:R)^2 - 1$  durch  $\Delta$ , so ist:

$$\varrho = (n' - \cos \varrho) \sin \zeta (\cos^2 \zeta + \Delta)^{-\frac{1}{2}},$$

und, das Binom entwickelt,  $\cos^{-1} \zeta$  abgesondert:

$$(12) \quad \varrho = (n' - \cos \varrho) \operatorname{tg} \zeta \left[ \begin{array}{l} 1 \\ + \frac{1}{8} \Delta^2 \sec^4 \zeta \\ + \frac{35}{128} \Delta^3 \sec^6 \zeta \\ + \frac{63}{256} \Delta^4 \sec^8 \zeta \\ + \frac{231}{1624} \Delta^5 \sec^{10} \zeta \\ + \frac{429}{2048} \Delta^6 \sec^{12} \zeta - \frac{429}{2048} \Delta^7 \sec^{14} \zeta + \text{etc.} \end{array} \right]$$

Ich suche nun aus diesem Werthe eine kürzere, der Simpson'schen Regel ( $\varrho = 0,000276 \operatorname{tg} [\zeta - 3\varrho]$ ) ähnliche Beziehung abzuleiten; bringe zu dem Ende (12) auf die Form:

$$\varrho = (n' - \cos \varrho) (\operatorname{tg} \zeta - k \operatorname{tg} \zeta \cdot \sec^2 \zeta)$$

und zerlege  $k$  in:  $q(1 - \frac{1}{8} \Delta \sec^2 \zeta + \frac{3}{8} \Delta^2 \sec^4 \zeta - \dots)$ , d. i.  $q\varrho/(n' - \cos \varrho) \operatorname{tg} \zeta$ . Dadurch verwandelt sich die letzte Gleichung in:

$$\varrho = (n' - \cos \varphi) \left( \operatorname{tg} \zeta - \frac{\varrho \varphi}{n' - \cos \varphi} \cdot \sec^2 \zeta \right) \\ = (n' - \cos \varphi) (\operatorname{tg} \zeta - D \varphi \cdot \sec^2 \zeta) = (n' - \cos \varphi) \operatorname{tg} (\zeta - D \varphi). —$$

Zunächst kann (12) geschrieben werden:

$$(13) \quad \varrho = (n' - \cos \varphi) (\operatorname{tg} \zeta - k \operatorname{tg} \zeta \cdot \sec^2 \zeta) \\ \text{für } \left\{ \begin{aligned} k &= \frac{1}{2} A - \frac{3}{8} A^2 \sec^2 \zeta + \frac{5}{16} A^3 \sec^4 \zeta - \frac{35}{128} A^4 \sec^6 \zeta \\ &\quad + \frac{63}{256} A^5 \sec^8 \zeta - \frac{231}{1024} A^6 \sec^{10} \zeta + \frac{439}{2048} A^7 \sec^{12} \zeta \dots \end{aligned} \right.$$

Nunmehr zerlege man  $k$  in eine Anzahl Reihen (14), sodass in jeder einzelnen derselben, nach Absonderung der gemeinschaftlichen Bruchfactoren, sich die Coëfficienten der primitiven Reihe (12), also 1,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{3}{8}$ ,  $\frac{5}{16}$ ,  $\frac{35}{128}$  u. s. w. wiederholen; so ergibt sich:

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} k &= \frac{1}{2} \cdot A - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot A^2 \sec^2 \zeta + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} \cdot A^3 \sec^4 \zeta - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{16} \cdot A^4 \sec^6 \zeta + \dots \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot A^2 \sec^2 \zeta + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot A^3 \sec^4 \zeta - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{16} \cdot A^4 \sec^6 \zeta + \dots \\ &\quad + \frac{1}{16} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot A^2 \sec^2 \zeta + \frac{1}{16} \cdot \frac{3}{8} \cdot A^3 \sec^4 \zeta - \frac{1}{16} \cdot \frac{5}{16} \cdot A^4 \sec^6 \zeta + \dots \\ &\quad - \frac{1}{128} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot A^2 \sec^2 \zeta + \frac{1}{128} \cdot \frac{3}{8} \cdot A^3 \sec^4 \zeta - \frac{1}{128} \cdot \frac{5}{16} \cdot A^4 \sec^6 \zeta + \dots \end{aligned} \right.$$

wobei des Druckes wegen die Glieder  $+\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{35}{128} + \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{16} + \frac{1}{16} \cdot \frac{3}{8} + \frac{5}{128} \cdot \frac{1}{2} + \frac{7}{256} \cdot 1 \dots\right) A^5 \sec^8 \zeta - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{63}{256} + \frac{1}{8} \cdot \frac{35}{128} + \frac{1}{16} \cdot \frac{5}{16} + \frac{5}{128} \cdot \frac{3}{8} + \frac{7}{256} \cdot \frac{1}{2} + \frac{21}{1024} \cdot 1 \dots\right) A^6 \sec^{10} \zeta + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{231}{1024} + \frac{1}{8} \cdot \frac{63}{256} + \frac{1}{16} \cdot \frac{35}{128} + \frac{5}{128} \cdot \frac{5}{16} + \frac{7}{256} \cdot \frac{3}{8} + \frac{21}{1024} \cdot \frac{1}{2} + \dots\right) A^7 \sec^{12} \zeta - \dots$  fortgelassen wurden, oder nach einer leichten Umformung, wegen  $1 - \frac{1}{2} A \sec^2 \zeta \dots = \varrho / (n' - \cos \varphi) \operatorname{tg} \zeta$ :

$$(15) \quad k = \left( \frac{1}{2} A - \frac{1}{8} A^2 \sec^2 \zeta + \frac{1}{16} A^3 \sec^4 \zeta - \frac{5}{128} A^4 \sec^6 \zeta + \dots \right) \cdot \frac{\varrho}{(n' - \cos \varphi) \operatorname{tg} \zeta}.$$

Sondert man nun weiter auf der rechten Seite  $\frac{1}{2} A$  ab, sodass ein Ausdruck von der Form  $\frac{1}{2} A (1 - A) \cdot \varrho / (n' - \cos \varphi) \operatorname{tg} \zeta$  herauskommt, und ausserdem von  $A$  den gemeinschaftlichen Factor  $\frac{1}{2} A \sec^2 \zeta$ ; so ergibt sich:

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} k \operatorname{tg} \zeta &= \frac{1}{2} \cdot \frac{A}{n' - \cos \varphi} \cdot \left[ 1 - \frac{1}{2} A \sec^2 \zeta \cdot (1 - \frac{1}{2} A \sec^2 \zeta \right. \\ &\quad \left. + \frac{5}{16} A^2 \sec^4 \zeta - \dots \right] \cdot \varrho. \end{aligned} \right.$$

Man könnte nun die runde Klammer nach dem Muster von (14) wiederum zerlegen, sodass die primitive Reihe sich immer wiederholt. Da jedoch die Klammer als Glied dritter Ordnung auftritt, so setze ich dafür genähert die primitive Reihe selber, nämlich  $(1 - \frac{1}{2} A \sec^2 \zeta + \frac{5}{8} A^2 \sec^4 \zeta - \dots)$  oder  $\varrho / (n' - \cos \varphi) \operatorname{tg} \zeta$ , und erhalte dann aus (13):

$$(17) \quad \varrho = (n' - \cos \varphi') \operatorname{tg}(\zeta - D\varphi')$$

für  $\begin{cases} D = \frac{1}{2} \cdot \frac{A}{n' - \cos \varphi} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{A}{n' - \cos \varphi} \cdot \frac{\varrho}{\sin 2\zeta}\right), \text{ nahe} \\ D = \frac{1}{2} \cdot \frac{A}{n' - \cos \varphi} \quad \text{und} \quad A = \left(\frac{u}{R}\right)^2 - 1. \end{cases}$

In dieser Refractionsformel ist der Coëfficient von  $\varrho$ , nämlich  $D$ , nicht = Const. (wie bei Simpson, Bradley), sondern eine Function von  $A$ , also abhängig von dem Radius der Hauptcurve  $u$  in der betreffenden Zenithdistanz. Aus diesem Grunde nenne ich die Grösse  $D$  die Determinante der astronomischen Refraction. Sie ist für jedes  $\zeta$  besonders zu bestimmen.

**§. 7. Entwicklung der Refractionsformel für  $\varrho_0$  bis  $\varrho_{90}$ .** — Gehen wir zurück auf die ursprüngliche Refractionsformel (8), nämlich:

$$(18) \quad \varrho = \frac{(n' - \cos \varphi) \sin \zeta}{\sqrt{\left[\left(\frac{u}{R}\right)^2 - \sin^2 \zeta\right]}}$$

und suchen wir die Unbekannte  $\varrho$  zu isoliren! Nach (5) ist der Polarwinkel der Hauptcurve  $\varphi$  und somit  $u/R$  abhängig von der Unbekannten, sodass in (18)  $u/R$  als Function von  $\varrho$  dargestellt werden muss. Nun war  $\varphi = \eta \cdot \zeta + (1 - \eta) \cdot \varepsilon + \eta \cdot \varrho$ , wo  $\varepsilon$  den Einfallswinkel an der Grenze der Atmosphäre und  $\eta$  das Verhältniss des Winkels  $bmk$  zur wirksamen Oeffnung vorstellt (es ist genähert  $= \frac{1}{2}$ ). Setzt man der Kürze halber  $\eta \cdot \zeta + (1 - \eta) \cdot \varepsilon = \varphi'$ , so hat man:

$$\varphi = \varphi' + \eta \cdot \varrho,$$

$$\text{also:} \quad \sin \varphi = \sin \varphi' \cdot \cos \eta \varrho + \cos \varphi' \cdot \eta \varrho,$$

$$\text{oder, wegen:} \quad \cos \eta \varrho = 1 - \frac{1}{2} \eta^2 \varrho^2,$$

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \sin \varphi' + \eta \cdot \cos \varphi' \cdot \varrho - \frac{1}{2} \eta^2 \cdot \sin \varphi' \cdot \varrho^2 \\ &= \sin \varphi' (1 + \eta \cdot \operatorname{ctg} \varphi' \cdot \varrho - \frac{1}{2} \eta^2 \cdot \varrho^2). \end{aligned}$$

Ferner ergibt sich aus (3):  $u/R = n' \sin \zeta / \sin \varphi$ , d. i.:

$$\frac{u}{R} = \frac{n' \sin \zeta}{\sin \varphi} (1 - \eta \cdot \operatorname{ctg} \varphi' \cdot \varrho + \frac{1}{2} \eta^2 \cdot \varrho^2),$$

womit  $u/R$  als Function der Unbekannten  $\varrho$  dargestellt ist.

Führt man diesen Werth in (18) ein und setzt zugleich  $1 - \frac{1}{2} \varrho^2$  statt  $\cos \varrho$ ; so erhält man einen Ausdruck von der Form:

$$(19) \quad \varrho = \frac{n' - 1 + \frac{1}{2}\varrho^2}{\sqrt{[p \cdot (1 - 2\eta \cdot \text{ctg } \varphi' \cdot \varrho + \eta^2 \cdot \varrho^2) - 1]}}$$

für  $\left\{ \begin{array}{l} \varphi' = \eta \cdot \zeta + (1 - \eta) \cdot \varepsilon \text{ und } p = \left( \frac{n'}{\sin \varphi} \right)^2. \end{array} \right.$

Quadriert man beide Seiten und ordnet nach Potenzen der Unbekannten, so ist:

$$(20) \quad \alpha \cdot \varrho^2 - \beta \cdot \varrho^3 + \gamma \cdot \varrho^4 = (n' - 1)^2$$

für  $\left\{ \begin{array}{l} \alpha = p - n', \quad \beta = 2\eta \cdot p \cdot \text{ctg } \varphi', \\ \gamma = \eta^2 \cdot p - 0,25. \end{array} \right.$

Nun findet man durch Versuche sehr leicht Refractions-  
werthe  $r$ , welche (20) nahezu identisch machen, sodass man  
 $\varrho = r + \delta r$  setzen kann. Führt man  $(r + \delta r)$  mit Vernach-  
lässigung der höheren Potenzen von  $\delta r$  in (20) ein und löst  
die Gleichung nach  $\delta r$ , so ergibt sich leicht:

$$(21) \quad \varrho = r + \delta r = \frac{\left( \frac{n' - 1}{r} \right)^2 + \alpha + 3\gamma \cdot r^2 - 2\beta \cdot r}{\frac{2\alpha}{r} + 4\gamma \cdot r - 3\beta},$$

wo man successive  $\varphi'$ ,  $p$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  für jede gegebene Zenith-  
distanz aus (19) und (20) zu berechnen hat.

**§ 8. Andere Luftzustände und benachbarte Refrac-  
tionen.** — Der Uebergang zu anderen Luftzuständen  
wird vermittelt durch die einfache, aus (18) sich ergebende  
Beziehung:

$$(22) \quad \frac{\varrho}{\varrho^m} = \frac{n' - 1}{n^m - 1} = \frac{b'(1 + \gamma \ell^m)}{b^m(1 + \gamma \ell')}.$$

Um die Berechnung einer Tafel für  $n^m - 1$  zu erleich-  
tern, ist es ferner nöthig, auch für den Uebergang zu  
benachbarten Zenithdistanzen bequeme Formeln zu ent-  
wickeln.

Solange (17),  $\varrho^m = (n^m - \cos \varrho^m) \text{tg}(\zeta - D \varrho^m)$ , gültig  
bleibt, d. h. bis etwa 70 oder 80 Grad Zenithdistanz, macht  
dies keine Schwierigkeit. Nach Determination der Formel  
 $\varrho^m = (n^m - \cos \varrho^m) \text{tg}(\zeta - D \varrho^m)$  für einige Zenithdistanzen z. B.  
30, 60, 70° erhält man die determinirten Formeln für die  
übrigen Zenithdistanzen durch einfache Interpolation der

Intervalle:  $n^m - \cos \varrho_{90}$  bis  $n^m - \cos \varrho_{60} \dots n^m - \cos \varrho_{60}$  bis  $n^m - \cos \varrho_{70} \dots D_{30}$  bis  $D_{60} \dots D_{60}$  bis  $D_{70}$ .

Was dann die Strahlenbrechung in der Nähe des Horizontes anlangt, so beachte man, dass die Particularrefraction an einer Schicht (wenn  $\varepsilon_n$  den Einfallswinkel vorstellt) ausgedrückt wird durch:  $\delta \varrho = \delta n \cdot \operatorname{tg} \varepsilon_n / n$ .<sup>1)</sup> Setzt man nun statt  $\varepsilon_n$  die Grenzwerte, nämlich die Zenithdistanz  $\zeta$  und den Einfallswinkel an der Grenze der Atmosphäre, so kann man integrieren und erhält:

$$\varrho < 2 \frac{n' - 1}{n' + 1} \operatorname{tg} \zeta, \quad > 2 \frac{n' - 1}{n' + 1} \operatorname{tg} \varepsilon,$$

und, da  $\zeta$  und  $\varepsilon$  nur wenig differiren, so wird in der Nähe des Horizontes der Ansatz gelten:

$$(23) \quad \varrho = 2 \frac{n' - 1}{n' + 1} \operatorname{tg} (\zeta - D \varrho).$$

Bestimmt man nun für einige Zenithdistanzen, z. B. 80, 85, 90°, die Refractionswerthe nach der genauen Formel (21), um einen festen Anhalt zu gewinnen, und bringt dieselben auf die Form:

$$\varrho_{80} = 2 \frac{n' - 1}{n' + 1} \operatorname{tg} (80 - D_{80} \cdot \varrho_{80}),$$

$$\varrho_{85} = 2 \frac{n' - 1}{n' + 1} \operatorname{tg} (85 - D_{85} \cdot \varrho_{85}) \text{ u. s. w.,}$$

und es erweist sich nun, dass  $D_{80}$  und  $D_{85}$ ,  $D_{85}$  und  $D_{90}$  annähernd gleich sind, so gewinnt man offenbar für die übrigen Zenithdistanzen die Determinanten aus  $D_{80}$ ,  $D_{85}$ ,  $D_{90}$  durch einfache Interpolation:

$$D_{81} = D_{80} - \frac{1}{3} (D_{80} - D_{85}),$$

$$D_{82} = D_{80} - \frac{2}{3} (D_{80} - D_{85}) \text{ u. s. w.,}$$

wodurch die Formel (23) determinirt ist.

Strenger ist das folgende Verfahren. Man bestimmt für 80, 85, 86 Grad aus dem Algorithmus (6) die zugehörigen Radien der Hauptcurve:  $u_{80}$ ,  $u_{85}$ ,  $u_{86}$  u. s. w. Da dieselben nur wenig von einander abweichen und also innerhalb gehörig enger Grenzen stetig abnehmen, so ist:

1) Bruhns, a. a. O. p. 87.

$$(24) \quad \frac{u_{s1}}{R} = \frac{u_{s0}}{R} - \frac{1}{3} \left( \frac{u_{s0}}{R} - \frac{u_{s5}}{R} \right), \quad \frac{u_{s2}}{R} = \frac{u_{s0}}{R} - \frac{2}{3} \left( \frac{u_{s0}}{R} - \frac{u_{s5}}{R} \right) \text{ u. s. w.,}$$

und wenn man diese Werthe in die ursprüngliche Refraktionsformel:

$$\varrho = \frac{n' - \cos \varrho}{\sqrt{\left[ \left( \frac{u}{R \sin \zeta} \right)^2 - 1 \right]}}$$

eingführt, so ergibt sich, wegen  $n' - \cos \varrho = n' - 1 + \frac{1}{2} \varrho^2$ , nach Isolirung der Unbekannten:

$$(25) \quad \varrho = \sqrt{2} [A - \sqrt{A^2 - (n' - 1)^2}]$$

$$\text{für } A = \left( \frac{u}{R \sin \zeta} \right)^2 - n'.$$

Nun bleibt aber  $(n' - 1)^2$  in (25) gegen  $A^2$  bis in die unmittelbare Nähe des Horizontes klein, sodass:

$$\sqrt{A^2 - (n' - 1)^2} = A - \frac{(n' - 1)^2}{2A}$$

gesetzt werden kann. Dadurch wird aus (25) die sehr bequeme Formel:

$$(26) \quad \varrho = \frac{n' - 1}{\sqrt{A}} = \frac{n' - 1}{\sqrt{\left[ \left( \frac{u}{R \sin \zeta} \right)^2 - n' \right]}}$$

wo  $u/R$  aus (24) für sämtliche in die Tafel aufzunehmende Zenithdistanzen berechnet wird.

Ich wende mich nunmehr zur Bestimmung der Refraktionsconstanten  $n' - 1$  und  $z_0$  (oder  $H/R$ ) und beschränke mich dabei zunächst auf Königsberger Luft bei 9,3° C. und 751,8 mm (50° F. und 29,6 Z. engl.), weil sich im Laufe der Untersuchung die Bestimmung jener Grössen einfacher gestalten wird, als bei der ersten Begründung der Theorie.

Dass die Constanten eines physikalisch gegebenen optischen Systems nicht rein theoretisch, sondern nur auf Grund empirischer Thatfachen zu gewinnen sind, ist selbstverständlich. Es fragt sich nur, von welchen Messungsdaten man auszugehen hat.

Was  $n^m - 1$  betrifft, so gibt den ersten Anhalt das Barometer und Thermometer. Allein vollkommen sicher ist die barothermometrische Bestimmung keineswegs, weil erstens

die Brechkraft von Gasen für dasselbe  $b$  und  $t$  bedeutend schwankt, und sodann die Formel  $n^m - 1 = (n_0 - 1) b^m / 0,76 (1 + \gamma t^m)$  unbestimmt lassen würde, der Brechungsindex welcher Farbe für  $n_0$  zu nehmen ist. Es bleibt daher nur übrig,  $n^m - 1$  durch sein naturgemässes Maass, nämlich durch die Ablenkung des Strahles, also aus directen Messungsdaten der Bessel'schen Refractionstafel zu ermitteln.

Das Verhältniss der Strahlenbrechung zu einer kleinen Zenithdistanz ( $z_0$ ) würde man bei bekannter Constitution der Atmosphäre am einfachsten aus Höhenmessungen gewinnen, da es, wegen  $H = 2R(n' - 1/z_0 - 1)$ , von  $H$  abhängig ist. Aber leider ist die Abstufung der Dichtigkeit in freier Atmosphäre unbekannt; die sehr vereinzelt und auch nur ungefähren Daten betreffen lediglich den Dunstkreis in der Nähe der Erdoberfläche; und dass dieselben auf die freie Atmosphäre nicht auszudehnen sind, liegt auf der Hand. Die Localeinflüsse, die Ausdünstung des Erdbodens, der in der Luft schwebende terrestrische Detritus, die Störungen der Continuität durch kältere und wärmere Luftströme, die sogar ein Zunehmen der Wärme mit der Höhe bewirken können, die fortwährende Veränderung der Constitution des Dunstkreises, die sich durch das Hin- und Herspringen der Sterne vor dem Faden des Fernrohres kenntlich macht — Alles dies weist darauf hin, dass in freier Atmosphäre die Dichtigkeitsabnahme eine andere ist, als an der Erde. Sie wäre also nur durch eine Hypothese zu gewinnen. Ich werde mich jedoch auf eine solche erst dann einlassen, nachdem ich geometrisch eine wenn auch nur genähert richtige Grundlage für dieselbe gewonnen habe, und bestimme  $z_0$  ebenfalls zunächst durch Rückschlüsse aus der Strahlenbrechung in höheren Zenithdistanzen.

Das Verhältniss des Winkels  $bmh$  zur wirksamen Oeffnung  $\eta$  setze ich  $= 0,5$ , was, nach den Bemerkungen zu (3) in nicht zu grossen Zenithdistanzen ohne Fehler geschehen kann. Erst später werde ich versuchen, mit Rücksicht auf die Constitution des Dunstkreises den Werth von  $\eta$  genauer zu ermitteln.

Und nun noch ein paar Worte in Betreff der Messungs-



data der Bessel'schen Refractionstafel, auf welche die Bestimmung der Constanten zu basiren ist! Für die Genauigkeit des Resultates wäre es von grossem Werthe, wenn man die Strahlenbrechung in möglichst hohen Zenithdistanzen wählen könnte, weil diese ihrem absoluten Betrage nach gross genug ist, um den Einfluss der Einstellungsfehler ( $\frac{1}{10} - \frac{1}{20}$  Secunde) zu paralysiren. Aber gerade diese grösseren Refractionen sind behaftet mit einer anderen Gattung von Beobachtungsfehlern. Mit der Vergrösserung der Zenithdistanzen hält nämlich die Vergrösserung der wirksamen Oeffnung gleichen Schritt, sodass der Eintrittspunkt des Strahles sich immer weiter von der Beobachtungsstation entfernt. In einem Umkreise von 40 oder 50 Meilen aber kann bei der Verschiedenheit der Luftzustände die Höhe der Atmosphäre nicht überall dieselbe sein; die homocentrische Begrenzung der Luftschichten und somit die Strahlenbrechung wird also in der Regel je nach der Himmelsrichtung mehr oder weniger gestört sein. Dazu kommt dann noch, dass die wechselnde, von mannichfachen Componenten bedingte Constitution des Dunstkreises gerade in geringen Höhen, wegen der Verlängerung der Lichtcurve und der Vergrösserung der Einfallswinkel, auf den Gang des Strahles einen wesentlichen Einfluss übt, sodass die Strahlenbrechung je nach der Witterung, den Luftströmungen u. s. w. variiren wird.

Aus diesen Gründen wähle ich zur Determination von  $n^m - 1$  und  $z_0^m$  die astronomischen Refractionen in 70, 71 und 72 Grad Zenithdistanz. Gelingt es später, die Refraction am Horizonte von jenen Fehlern zu befreien, so wäre es ein Leichtes, die Constanten mit voller Schärfe zu berechnen.

## II. Determination der Formeln.

**§ 1. Ungefähre Bestimmung von  $n^m - 1$  für Königsberg.** — Wählt man in der Formel  $n^m - 1 = (n_0 - 1)b^m / 0,76(1 + \gamma t^m)$  den Brechungsquotienten für die Natronlinie und feuchte Luft im Normalzustande, nämlich 1,000 294 04 (nach Ketteler und Delambre); so ergibt sich wegen  $b^m = 0,7518$  m (29,6 Z. engl.) und  $t^m = 9,3^\circ$  C. ( $50^\circ$  F.):

(1)

Jedoch

Das

Brechun

mehrfac

strumen

niant r

scheiden

festigt

zwischen

Lufttem

des der

legung

stelltem

corrigir

zu wid

W

meter

Brechu

ringe

distanz

9,3° C.

99,1;

später

Carli

weicht

A

strum

1)

2)

3)

4)

33 bis

zu hoch

dass

ist, d

besser

übers

$$(1) \quad n^m - 1 = 0,000\,2813.$$

Jedoch kann dieser Werth nur als ein ungefährender gelten.

Dass die barothermometrische Bestimmung der Brechkraft der Atmosphäre unzuverlässig ist, hat Bessel mehrfach angedeutet. Er wirft die Frage auf<sup>1)</sup>, *parine instrumentorum meteorologicorum gradui pares ubique conveniant refractiones*; er bemüht sich<sup>2)</sup>, durch Versuche zu entscheiden, ob nicht der Ort, wo das äussere Thermometer befestigt ist, die Veranlassung einer mittleren Verschiedenheit zwischen der Angabe dieses Thermometers und der wahren Lufttemperatur werden kann; und bespricht<sup>3)</sup> den Einfluss des der Luft beigemengten Wasserdampfes, mit Zugrundelegung einer von Laplace in der *Mécanique céleste* aufgestellten Formel; er untersucht das Bradley'sche Thermometer, corrigirt es zuerst um 1,25° F., um später diese Correctur zu widerrufen.<sup>4)</sup>

Wie sehr an verschiedenen Orten für dasselbe Barometer und Thermometer die Refractionswerthe, d. h. die Brechkraft der Atmosphäre abweicht, beweist die geringe Uebereinstimmung der Tafeln in kleineren Zenithdistanzen. So hat beispielsweise in 60° Zenithdistanz für 9,3° C. und 751,8 mm: Bessel 99,7"; Bradley 98,4; Mayer 99,1; Delambre 99,5; Carlini 100,1; Groombridge 99,2, später 99,3; Piazzzi 98,9; Bürg 101,0", sodass Bradley von Carlini um  $\frac{1}{100}$ , von Bürg gar um  $\frac{1}{10}$  des Betrages abweicht.

Aber selbst für einen Ort kann die Angabe dieser Instrumente in Betreff der Brechkraft der Atmosphäre

1) Bessel, *Fundamenta Astronomiae*. p. 54.

2) Bessel, *Königsberger Beobachtungen*. 7. p. 27. 1822.

3) *Ibid.* p. 11.

4) *Ibid.* p. 26. Bradley's Thermometer zeigte in schmelzendem Schnee 33 bis 33 $\frac{1}{2}$ °, und demzufolge habe ich angenommen, dass es 1,25° F. zu hoch stand; allein ich verdanke Hrn. Prof. Tralles die Mittheilung, dass der schmelzende Schnee, wenn er bereits mit Wasser vermischt ist, den Eispunkt stets zu hoch angibt, sodass die angebrachte Verbesserung zweifelhaft wird. — Bruhns, a. a. O. p. 125, hat diese Stelle übersehen.

keineswegs als zuverlässig gelten. Nach Ketteler<sup>1)</sup> ergab sich bei der Untersuchung von Heidelberger Luft mittelst eines Jamin'schen Interferentialrefractors:

für getrocknete Luft (Linie D) $n_0 - 1 = 0,000\,294\,60$ ,	
„ trockene atmosphärische Luft . . . . .	295 36,
„ feuchte Luft . . . . .	294 04,
„ leuchtgashaltige Luft . . . . .	293 38,

und Arago und Biot fanden als Extremwerthe:

$$n_0 - 1 = 0,000\,296\,78 \text{ und } 0,000\,293\,90,$$

sodass für dieselbe Farbe, bei gleichem Barometer- und Thermometerstande, an demselben Orte  $n_0 - 1$  bis  $\frac{1}{100}$  des Betrages variiren kann.

Dazu kommt dann noch, dass man die Farbe, welche bei der Einstellung eines astronomischen Objectes vor das Fadenkreuz massgebend ist, a priori nicht als bekannt voraussetzen darf, sodass die Formel  $n^m - 1 = (n_0 - 1) b^m / 0,76 (1 + \gamma t^m)$ , wegen  $n_0 - 1$ , unbestimmt ist.

Aus dieser Discussion scheint mir hervorzugehen, dass die barothermometrische Bestimmung von  $n^m - 1$  für unseren Zweck nicht ausreicht. Andererseits kann nicht geleugnet werden, dass bei Vergleichen die Ermittlung von  $n' - 1$  aus  $b'$ ,  $t'$  recht zuverlässig ist; d. h. wenn man die wahre Brechkraft der Atmosphäre ( $n^m - 1$ ) für ein bestimmtes  $b^m$ ,  $t^m$  kennt, so wird für einen anderen Luftzustand ( $b'$ ,  $t'$ ) das entsprechende  $n' - 1$  durch die Verhältnisse  $b'/b^m$  und  $1 + \gamma t^m / 1 + \gamma t'$  vollkommen sicher angegeben, weil bei Vergleichen kleine Fehler in demselben Sinne wirksam und eben deshalb unschädlich sind. Beim Uebergange zu anderen Luftzuständen setze ich daher:

$$(2) \quad n' - 1 = (n^m - 1) \frac{b'(1 + \gamma t^m)}{b^m(1 + \gamma t')}$$

**§ 2. Genauere Bestimmung von  $n^m - 1$ .** — Für benachbarte Zenithdistanzen  $\zeta'$  und  $\zeta''$  ergibt sich aus der früher entwickelten Refractionsformel<sup>2)</sup>:

1) E. Ketteler, Beobachtungen über die Farbenzerstreuung der Gase. p. 54. Bonn 1865.

1) Abschnitt I. § 6. (17).

Setzt m  
gleich,  
 $h_0 h$  nu  
diese G

Um be  
zureich  
( $\mu + \delta$   
bezeich

(3)

wobei

(4)

der  
 $e_{71}^m =$   
(5)  
und  
Ther

(6)

a  
Da  
 $t^m =$   
9,3°  
stuf

$$\frac{\varrho'}{n' - \cos \varphi'} = \operatorname{tg} \zeta' - D' \varrho' \cdot \sec^2 \zeta' \quad \text{und}$$

$$\frac{\varrho''}{n' - \cos \varphi''} = \operatorname{tg} \zeta'' - D'' \varrho'' \cdot \sec^2 \zeta''.$$

Setzt man die beiden „Determinanten“  $D'$  und  $D''$  einander gleich, was ohne Fehler geschehen kann, da die Hauptcurve  $h_0 h$  nur wenig von einem Kreise abweicht, und eliminirt diese Grösse; so erhält man eine Gleichung für  $n'$ , nämlich:

$$\frac{\sec^2 \zeta''}{n' - \cos \varphi'} - \frac{\sec^2 \zeta'}{n' - \cos \varphi''} = \frac{\operatorname{tg} \zeta'}{\varrho'} \cdot \sec^2 \zeta'' - \frac{\operatorname{tg} \zeta''}{\varrho''} \cdot \sec^2 \zeta'.$$

Um bei ihrer Lösung mit siebenstelligen Logarithmen auszureichen, führe ich anstatt der Unbekannten das Binom  $(\mu + \delta\mu)$  ein, wo  $\mu = 1,000\,2813$  den Näherungswerth in (1) bezeichnet, und erhalte dann einen Ausdruck von der Form:

$$(3) \quad n' = \mu + \frac{c - a}{b - d},$$

wobei man successive zu berechnen hat:

$$(4) \quad \begin{cases} A = \frac{\operatorname{tg} \zeta'}{\varrho' \cdot \cos^2 \zeta''}, & B = \frac{\operatorname{tg} \zeta''}{\varrho'' \cdot \cos^2 \zeta'}, \\ a = (A - B)(\mu - \cos \varphi')(\mu - \cos \varphi'')^2, \\ b = (A - B)(2\mu - \cos \varphi' - \cos \varphi''), \\ c = \frac{\mu - \cos \varphi''}{\cos^2 \zeta''} - \frac{\mu - \cos \varphi'}{\cos^2 \zeta'}, & d = \frac{1}{\cos^2 \zeta''} - \frac{1}{\cos^2 \zeta'}. \end{cases}$$

Nach dieser Formel ist nun für Königsberg, wenn aus der Bessel'schen Refractionstafel  $\varrho_{70}^m = 157,3''$  für  $\varphi'$  und  $\varrho_{71}^m = 166,1''$  für  $\varphi''$  eingeführt wird:

$$(5) \quad n^m - 1 = 0,000\,280\,4 \dots,$$

und nach (2) allgemein für ein beliebiges Barometer und Thermometer, wegen  $b^m = 0,7518$  m und  $t^m = 9,3^\circ$  C.:

$$(6) \quad n' - 1 = (n^m - 1) \frac{b'(1 + \gamma t^m)}{b^m(1 + \gamma t')} = \frac{0,000\,385\,9 \dots b'}{1 + 0,003\,670 \cdot t'},$$

$$\text{also } n_0 - 1 = 0,000\,293\,1 \dots$$

Da nun aber  $n_0 - 1 = 0,000\,294 \dots$  werden muss, so hat man  $t^m = 9,3^\circ$  in  $t^m = 10^\circ$  abzuändern: die Königsberger Luft bei  $9,3^\circ$  hat die Brechkraft einer bis zu  $10^\circ$  stetig abgestuften Atmosphäre.

1) Eine viel bequemere Beziehung ergibt sich später.

2) Man nehme  $(\mu - \cos \varphi)$  stets bis in die neunte oder zehnte Decimale.

Bei den Königsberger Refractionsbestimmungen (von Argelander) war die wahre Wärme der Erde  $10^0$  statt  $9,3^0$ .<sup>1)</sup>

§ 3. **Correctur von  $\varrho_{70}$ ,  $\varrho_{71}$  und  $\varrho_{72}$ .** — Um die Bestimmung (5):  $n^m - 1 = 0,0002804$  .. noch mehr zu verschärfen, ist es nöthig, die Messungsdata in 70, 71 und 72 Grad Zenithdistanz so zu corrigiren, dass die Fehler bei gleicher relativer Grösse dasselbe Zeichen haben.

Nach der Refractionsformel:  $\varrho = (n' - \cos \varrho) \operatorname{tg} (\zeta - D \varrho)$  ist die Determinante der astronomischen Refraction:

$$(7) \quad D = \left( \operatorname{tg} \zeta - \frac{\varrho}{n' - \cos \varrho} \right) \cdot \frac{\cos^2 \zeta}{\varrho}.$$

Nun weicht die Hauptcurve  $h_0 h$  innerhalb gehörig enger Grenzen nur wenig von einem Kreise ab. Man kann daher für benachbarte Zenithdistanzen  $\zeta'$ ,  $\zeta''$ ,  $\zeta'''$  etc. ohne wesentlichen Fehler den Radius der Hauptcurve, mithin auch  $A = (u/R)^2 - 1$  und  $D = \frac{1}{2} A / (n' - \cos \varrho)$  als constant betrachten. Wenn man daher nach (7) für  $n^m - 1 = 0,0002804$  ...,  $\varrho_{70}^m = 157,3''$ ,  $\varrho_{71}^m = 166,1''$ ,  $\varrho_{72}^m = 175,8''$  die bezüglichen Determinanten  $D$  berechnet und

$$\text{aus } D_{70} = 4,69080,$$

$$\text{„ } D_{71} = 4,69248,$$

$$\text{„ } D_{72} = 4,70864,$$

den Durchschnitt  $D = 4,6973$  .. nimmt; so hat man in der Nähe von  $70^0$  als determinirte Refractionsformel:

$$(8) \quad \varrho^m = (1,0002804 - \cos \varrho^m) \operatorname{tg} (\zeta - 4,6973 \varrho).^{2)}$$

Was die Genauigkeit derselben anlangt, so fällt ein Fehler in der Determinante so gut wie gar nicht ins Gewicht, da diese Grösse in einem Gliede zweiter Ordnung auftritt. Bedenklicher dagegen ist die Bestimmung:  $n^m - 1$

1) Nach Bauernfeind wird der Wärmegrad der Luft zwischen vier Uhr Nachmittags und zehn Uhr Morgens von den Thermometern zu niedrig angegeben. Danach könnte man  $t^m = 9,3^0$  als falsche Thermometerangabe auffassen. Ich kann jedoch die Bauernfeind'sche Theorie nicht acceptiren und bekenne mich mit Bessel (Königsberger Beobachtungen. 7. p. 27. 1822) zu der Ansicht, dass  $t^m$  von den Thermometern (bei gutem Schutze) richtig angegeben wird.

2) Bradley hatte:  $\varrho^m = 0,000276 \operatorname{tg} (\zeta - 3 \varrho)$ .

= 0,000 280 4 . . , welche für die Formel am meisten charakteristisch ist. Aber der dadurch gemachte Fehler lässt sich leicht eliminiren, wenn man aus je zwei benachbarten Refractionen die Quotienten ( $\varrho'/\varrho''$ ,  $\varrho''/\varrho'''$ ) bildet, weil bei Vergleichen in engen Grenzen kleine Fehler in demselben Sinne wirksam und daher unschädlich sind. Man erhält auf diese Weise aus (8) in der Nähe von  $70^\circ$  als eine sehr genaue Formel:

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{\varrho'}{\varrho''} = \frac{(0,000\,280\,4 - \cos \varrho') \operatorname{tg}(\zeta' - 4,6973 \varrho')}{(0,000\,280\,4 - \cos \varrho'') \operatorname{tg}(\zeta'' - 4,6973 \varrho'')} \\ \frac{\varrho''}{\varrho'''} = \frac{(0,000\,280\,4 - \cos \varrho'') \operatorname{tg}(\zeta'' - 4,6973 \varrho'')}{(0,000\,280\,4 - \cos \varrho''') \operatorname{tg}(\zeta''' - 4,6973 \varrho''')} \end{cases}$$

Diese Formel bestimmt die Progression in der Scala der astronomischen Refractionen, d. h. das Verhältniss benachbarter Refractionswerthe; sie kann daher zur Ermittlung von Beobachtungsfehlern verwendet werden. Lässt man nämlich  $\varrho''$  stetig wachsen und substituirt in (9) für  $\varrho'$  und  $\varrho'''$  auf der rechten Seite, wo kleine Fehler nicht ins Gewicht fallen, die Messungsdata; so erhält man für  $\varrho'$ ,  $\varrho'''$  eine Anzahl coordinirter Werthe, welche sämmtlich der durch (9) ausgedrückten Progression Genüge leisten; nur wenige derselben genügen aber der zweiten in Betracht zu ziehenden Bedingung, dass die Beobachtungsfehler den Betrag von  $1/20$  Secunde nicht überschreiten sollen.<sup>1)</sup>

Die Rechnung gestaltet sich am bequemsten, wenn man die Messungsdata der Bessel'schen Refractionstafel durch  $\varrho'$ ,  $\varrho''$ ,  $\varrho'''$ , die Beobachtungsfehler durch  $\delta\varrho'$ ,  $\delta\varrho''$ ,  $\delta\varrho'''$  etc. bezeichnet, sodass sich (9) verwandelt in:

$$(10) \quad \begin{cases} \delta\varrho' = \frac{(0,000\,280\,4 - \cos \varrho') \operatorname{tg}(\zeta' - 4,6973 \varrho')}{(0,000\,280\,4 - \cos \varrho'') \operatorname{tg}(\zeta'' - 4,6973 \varrho'')} \cdot (\varrho'' + \delta\varrho'') - \varrho' \text{ und} \\ \delta\varrho''' = \frac{(0,000\,280\,4 - \cos \varrho'') \operatorname{tg}(\zeta'' - 4,6973 \varrho'')}{(0,000\,280\,4 - \cos \varrho''') \operatorname{tg}(\zeta''' - 4,6973 \varrho''')} \cdot (\varrho''' + \delta\varrho''') - \varrho'' \end{cases}$$

Setzt man nun in (10):  $\varrho_{70} = 157,3''$ ,  $\varrho_{71} = 166,1''$  und  $\varrho_{72} = 175,8''$  und lässt  $\delta\varrho_{71}$  von 0 an stetig um  $1/100$  Secunde wachsen, so erhält man folgende coordinirte Reihen:

1) N. Lockyer, die Beobachtung der Sterne sonst und jetzt, deutsch von G. Siebert. p. 284. Braunschweig 1880.

	$\delta \varrho_{71} = 0''$	$+0,01''$	$+0,02''$	$+0,03''$	$+0,04''$
$\delta \varrho_{70}$	$-0,003''$	$+0,007''$	$+0,014''$	$+0,026''$	$+0,036''$
$\delta \varrho_{72}$	$+0,016''$	$+0,027''$	$+0,037''$	$+0,048''$	$+0,059''$

von welchen die vier ersten Werthe zeigen, die kleiner sind, als  $\frac{1}{20}$  Secunde. Ich habe diese Combinationen, welche nahezu auf dieselben Refractionsconstanten ( $n^m - 1$  und  $z_0^m$ ) führen, einer Prüfung unterzogen und, mit Rücksicht auf die in Königsberg so merkwürdig grosse Strahlenbrechung in der Nähe des Horizontes, mich für die vierte als die wahrscheinlichste entschieden. Daher basire ich die Determination der Formeln auf:

$$(11) \quad \varrho_{70} = 157,326'', \quad \varrho_{71} = 166,130'' \text{ und } \varrho_{72} = 175,848''.$$

§ 4. Endgültige Bestimmung von  $n^m - 1$ . — Nach dieser Correctur ergibt sich nun für  $n^m - 1$  ein sehr genauer Werth, indem man in die Formel (3):

$$n' = \mu + \frac{c-a}{b-d},$$

$\mu = 1,0002804$  . . einführt und die Constanten  $a$  bis  $d$  1. durch  $\varrho_{70}$  und  $\varrho_{71}$ , 2. durch  $\varrho_{71}$  und  $\varrho_{72}$  genau bestimmt. Auf diese Weise folgt:

1. aus  $\varrho_{70}$  und  $\varrho_{71}$ :  $n^m - 1 = 0,000280421$ ,
  2. aus  $\varrho_{71}$  und  $\varrho_{72}$ :  $n^m - 1 = 0,000280332$ ,
- im Durchschnitt:  $n^m - 1 = 0,000280377$ .

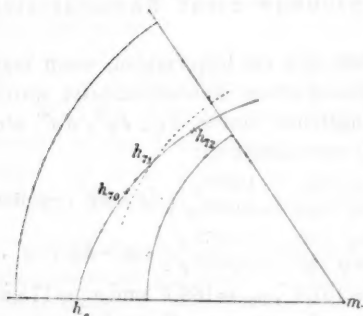


Fig. 3.

mung der Hauptcurve im entgegengesetzten Sinne geltend, wie es Fig. 3 graphisch darstellt. Folglich ist der

Nun beachte man, dass wir in der Nähe von  $70^\circ$  die Determinanten einander gleich gesetzt, also anstatt der Hauptcurve  $h_0 h$  uns einen Kreis gedacht hatten. Indem wir nun soeben, bei der Berechnung von  $n^m - 1$ ,  $\varrho_{71}$  einerseits mit  $\varrho_{70}$ , andererseits mit  $\varrho_{72}$  combinirten, macht sich der Fehler in der Krüm-

Durchsc  
genaue  
(12)  
und na  
Thermo  
(13)

§ 5  
lenbrech  
Ermitte  
data in  
Algorit

und d

berech

$D =$

$\Delta'$  in

$\Delta$  in

$\frac{u}{R} =$

$\epsilon =$

$z_0 =$

und

$\varrho_{72}^m =$

im I



Durchschnitt aus den beiden obigen Bestimmungen ein sehr genauer Werth. Man hat daher für Königsberg:

$$(12) \quad n^m - 1 = 0,000\,280\,377,$$

und nach (2) allgemein für ein beliebiges Barometer und Thermometer:

$$(13) \quad n' - 1 = (n^m - 1) \cdot \frac{b' (1 + \gamma t^m)}{b^m (1 + \gamma t')} = \frac{0,000\,385\,652\,4 \cdot b'}{1 + 0,003\,670\,t'}.$$

§ 5. Bestimmung von  $z_0^m$ . — Das Verhältniss der Strahlenbrechung zu einer kleinen Zenithdistanz ergibt sich nach Ermittlung von  $n^m - 1$  aus einem der corrigirten Messungsdata in der Nähe von  $70^\circ$ . Aus dem früher aufgestellten Algorithmus:

$$\begin{cases} \frac{H}{R} = 2 \left( \frac{n' - 1}{z_0} - 1 \right), \quad \sin \varepsilon = \frac{n' \sin \zeta}{1 + H : R}, \\ q = \eta \cdot (\zeta + \varrho) + (1 - \eta) \cdot \varepsilon, \quad \text{nahe } \frac{\zeta + \varrho + \varepsilon}{2}, \\ \frac{u}{R} = \frac{n' \sin \zeta}{\sin q}, \quad A = \left( \frac{u}{R} \right)^2 - 1, \end{cases}$$

und der Refractionsformel:

$$\begin{cases} \varrho = (n' - \cos \varrho) \operatorname{tg} (\zeta - D \varrho), \\ D = \frac{1}{2} \cdot \frac{A}{n' - \cos \varrho} \cdot \left( 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{A}{n' - \cos \varrho} \cdot \frac{\varrho}{\sin 2\zeta} \right) \end{cases}$$

berechnet man, rückwärts schreitend, successive:

$$\begin{cases} D = \left( \operatorname{tg} \zeta - \frac{\varrho}{n' - \cos \varrho} \right) \frac{\cos^2 \zeta}{\varrho}, \\ A' \text{ in erster Näherung} = 2 (n' - \cos \varrho) \cdot D, \\ A \text{ in zweiter Näherung} = (n' - \cos \varrho) \left( 2 + \frac{A'}{n' - \cos \varrho} \cdot \frac{\varrho}{\sin 2\zeta} \right) \cdot D, \\ \frac{u}{R} = \sqrt{1 + A}, \quad \sin q = \frac{n' \sin \zeta}{u : R}, \\ \varepsilon = 2q - (\zeta + \varrho), \quad \frac{H}{R} = \frac{n' \sin \zeta}{\sin \varepsilon} - 1, \\ z_0 = \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{H}{R} \right) (n' - 1), \end{cases}$$

und erhält auf diese Weise 1. aus  $\varrho_{70}^m = 157,326''$ , 2. aus  $\varrho_{72}^m = 175,848''$ :

$$1. \quad z_0^m = 0,000\,280\,012\,5 = 57,756\,75'',$$

$$2. \quad z_0^m = 0,000\,280\,011\,6 = 57,756\,57'',$$

im Durchschnitt:  $z_0^m = 0,000\,280\,012\,0 = 57,756\,66''$ .

Daraus folgt dann weiter:

$$(14) \quad \frac{H^m}{R} = 0,002\,607\,38,$$

und da die Polhöhe der Königsberger Sternwarte  $54^\circ 42' 50,5''^1$ , die grosse Halbaxe des Erdsphäroids = 6377,4, die kleine = 6356,1 km, also der Erdradius in Königsberger Breite = 6363,177 km ist:

$$(15) \quad H^m = 16,591 \text{ km.}$$

### § 6. Vergleichung der Bestimmungen von $z_0^m$ . —

Nach Bessel ist das Verhältniss der Strahlenbrechung zu einer kleinen Zenithdistanz:  $z_0^m = 57,3''$ , während wir gefunden haben:  $z_0^m = 57,76''$ . Der Unterschied zwischen beiden Werthen macht zwar nur 0,007 des Gesamtbetrages aus; er führt indess zu so verschiedenen Bestimmungen für die Höhe der Atmosphäre, dass er dadurch für die ganze Theorie von einschneidender Bedeutung wird.

Ich hatte früher<sup>2)</sup>, mit Rücksicht auf die astronomische Bestimmung ( $z_0^m = 57,3''$ ), angesetzt:  $z_0^m = 57,3'' \cdot (1 + A)$ , wo  $A$  den Fehler in Bruchtheilen des Betrages vorstellt. Nach Einführung dieses Werthes in die Formel:  $H = 2R(n^m - 1/z_0^m - 1)$  erhält man:

$$(16) \quad H^m = 2R \left( \frac{n^m - 1}{z_0^m} - 1 \right) - 2R \cdot A,$$

also für  $n^m - 1 = 0,000\,282$  und  $R = 6366,7 \text{ km}$ :  $H^m = 192,6 \text{ km} - 2R \cdot A$ .

Die Formel (16) ist nun, wegen  $2R \cdot A$ , sehr empfindlich. Setzt man beispielsweise den von Mousson<sup>3)</sup> angeführten (Lambert'schen) Näherungswerth:  $z_0^m = n^m - 1$ , welcher in der That bis auf 0,001 des Betrages richtig ist, so erhält man:  $H^m = 0$ . Nimmt man den Ansatz  $z_0^m = 57,3''$  als richtig an, sodass in (16)  $A = 0$  zu setzen wäre, so wird für  $n^m - 1 = 0,000\,282$ :  $H^m = 192,6$ ; für  $n^m - 1 = 0,000\,280$  bereits = 100,9 km. Und die von uns gefundene Bestimmung

1) Bessel und Baeyer, Gradmessung in Ostpreussen. p. 401. Berlin 1838.

2) Kerber, Wied. Ann. 14. p. 119. 1881.

3) Mousson, Physik, (§ 741) § 820.

$z_0^m = 57,76 \dots$  reducirt die Höhe der Atmosphäre gar auf 16,6 km.

Dass die letzte numerische Bestimmung nicht unwahrscheinlich ist, ergibt sich aus dem relativ sichersten directen Messungsdatum, welches wir besitzen. Nach der barothermometrischen Bestimmung von Gay-Lussac betrug in einer Höhe von 7 km die Brechkraft der Atmosphäre  $(n-1) 0,0001319$ , und auf der Erde war dieselbe  $= 0,0002665$ . Sie hatte also in der Höhe von 7 km nahe um die Hälfte abgenommen, und da dieselbe ohne Zweifel mehr oder weniger gleichmässig abnimmt, so wird die von Gay-Lussac erreichte Höhe ungefähr die Mitte der Atmosphäre sein, also  $H$  gegen 14 km betragen.

Dem gegenüber steht nun freilich die Bestimmung des Spaniers Alhazen ( $H = 79$  km) aus dem Dämmerungsbogen von ca.  $18^\circ$ . Sie kann indessen nicht als entscheidend angesehen werden. Denn sie gilt nur unter der Voraussetzung, dass die Dämmerung auf einmaliger Reflexion beruht. Da sie aber auch von wiederholter Spiegelung oder (nach der Wellentheorie) von diffuser Zurückwerfung herrühren kann, so ist die Alhazen'sche Beweisführung auch in dieser Richtung, in Betreff der unteren Grenze für die Höhe der Atmosphäre, nicht überzeugend. Und so trugen denn Cassini, Simpson, Bessel u. s. w. kein Bedenken, dieselbe weit niedriger zu setzen (Bessel hat 28 km, Simpson 10, Cassini gar 4 km).

Die directe Messung spricht also für den Ansatz:  $z_0^m = 57,76 \dots$  Dazu kommt, dass wir denselben streng mathematisch aus sehr genauen Refractionswerthen abgeleitet haben. Wie aber steht es dem gegenüber mit dem Ansatz:  $z_0^m = 57,3$ ? Bei der Kleinheit der astronomischen Refraction in der Nähe des Zenithes ist es unmöglich, das Verhältniss  $z_0^m$  direct zu messen. Es ist gewonnen durch Rückschlüsse aus anderen Bestimmungen, und diese Schlüsse sind basirt auf eine Hypothese über die Wärmeabnahme mit der Höhe, die keineswegs als gesichert gelten kann. „Die Bessel'sche Hypothese, sagt Bruhns<sup>1)</sup>, ist diejenige, welche

1) Bruhns, a. a. O. p. 181.

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XV.

am wenigsten den physischen Bedingungen genügt; Bessel scheint dies auch selbst anerkannt zu haben, denn von 85 bis 90 Grad Zenithdistanz hat er später auf empirischem Wege die Refractionswerthe bestimmen lassen<sup>1)</sup> und diese empirischen Werthe an die Stelle der aus der Theorie abgeleiteten gesetzt“.

Ueberhaupt sieht Bruhns das Hauptverdienst der Refractionstheorien in der „analytischen Behandlung des Problems“, also in der Lösung des Integrals:

$$e^{-\frac{\cos^2 z}{\sin^2 z} \frac{av}{2l}} \int_0^x e^{-tt} \delta t.$$

$$\frac{\cos z}{\sin z} \sqrt{\frac{av}{2l}}$$

„Nachdem Kramp die Bahn gebrochen, haben Laplace, Bessel, Schmidt, Ivory u. a. die Aufgaben, welche sie sich stellten, vollständig gelöst, und sobald die Physik ein anderes Gesetz der Wärmeabnahme in der Atmosphäre geben könnte, wäre es leicht, in aller Strenge dafür die Refraction abzuleiten“. <sup>2)</sup> Die physischen Voraussetzungen aber, von welchen diese analytischen Entwicklungen ausgegangen sind, hält Bruhns durchaus für problematisch.

Bei dieser Sachlage gebe ich den Ansatz der Bessel'schen Refractionstafel auf und ersetze ihn durch  $z_0^m = 57,756\ 66''$ . Die sich daraus ergebende Reduction von  $H$  (auf 16,6 km) steht, wie sich zeigen wird, mit den physischen Verhältnissen im schönsten Einklang.

**§ 7. Determination der Formeln für  $F, F'$  etc.** — Ich hatte früher den Formeln für die wichtigsten Punkte der Atmosphäre numerische Bestimmungen hinzugefügt, welchen das Verhältniss  $z_0^m = 57,3''$  zu Grunde lag. Da sich dieses nun als falsch erwiesen hat, so gebe ich im Folgenden die corrigirten Werthe, berechnet für  $n^m = 1,000\ 280\ 377$ ,  $z_0^m = 57,756\ 66''$  und  $R = 6363,2$  km (Königsberg):

1) Durch Argelander.

2) Bruhns, a. a. O. p. 181.

	Formel	Mittelwerth
Hinterseitige Brennweite	$F' = \frac{R}{z_0}$	22 672 010 km
Vorderseitige Brennweite	$F = \frac{n' R}{z_0}$	22 731 120 km
Entfernung des Hauptpunktes vom Erdcentrum	$m h_0 = \frac{(n' - 1) R}{z_0}$	6371,496 km
Entfernung des Hauptpunktes von der Erdoberfläche	$c h_0 = m h_0 - R$	8,296 km
Höhe der Atmosphäre	$H = 2 c h_0 = 2 \left( \frac{n' - 1}{z_0} - 1 \right) R$	16,591 km
Entfernung des Zenithpunktes von der Erde für kleines $\zeta$	$c d_0 = (n' - 1 - z_0 n') R$	0,001 823 km

Schliesslich finde hier die allgemeine Formel für die Entfernung des Zenithpunktes von der Erde ihren Platz. In Fig. 4 ist  $d$  der Zenithpunkt des Strahles  $abc$ , d. h. der Durchschnittspunkt seiner Anfangsrichtung mit dem verlängerten Erdradius der Beobachtungsstation. Aus  $hf = n' R \sin \zeta^1)$  ergibt sich nun:

$$md = \frac{hf}{\sin(amd)} = \frac{n' R \sin \zeta}{\sin(\zeta + \varphi)} \text{ und}$$

$$(17) \quad cd = \left[ \frac{n' \sin \zeta}{\sin(\zeta + \varphi)} - 1 \right] \cdot R.$$

Beispielsweise ist für den horizontal gebrochenen Strahl ( $\varphi_{90} = \text{ca. } 30'$ ):  $cd_{90} = \text{ca. } 2 \text{ km}$ , also über 1000 mal so gross, als am Zenith. Für kleines  $\zeta_0$  verwandelt sich die allgemeine Formel (17) in die früher aus der Theorie von Gauss, Helmholtz abgeleitete Relation. Denn es ist nach (17):

$$cd_0 = \left( \frac{n'}{1 + z_0} - 1 \right) \cdot R = [n'(1 - z_0) - 1] \cdot R$$

$$= (n' - 1 - n'z_0) \cdot R,$$

das ist die in der Tafel angegebene Beziehung.

**§ 8. Determination der Formel für  $\varphi_0$  bis  $\varphi_{70}$ .** Durch  $n^m - 1 = 0,000280377$  und  $z_0^m = 57,75666''$  ( $H/R = 0,00260738$ )

1) Abschnitt I. § 3. (2).

ist die Formel  $\varrho = (n^m - \cos \varrho) \cdot \operatorname{tg} (\zeta - D\varrho)$  vollkommen determinirt, da kleine Verschiedenheiten in der Constitution des

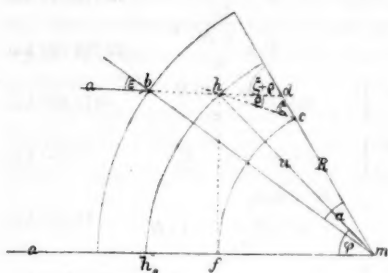


Fig. 4.

gesetzt werden kann. — Man berechnet successive: den ersten Näherungswert für  $\varrho^m$ , nämlich:

$$\varrho' = (n^m - 1) \operatorname{tg} \zeta^1);$$

sodann:  $\varepsilon = \arcsin \frac{n^m \sin \zeta}{1 + H:R}$ ,  $\varphi = \frac{\zeta + \varrho' + \varepsilon}{2}$ ,

$$\frac{u}{R} = \frac{n^m \sin \zeta}{\sin \varphi}, \quad \Delta = \left( \frac{u}{R} \right)^2 - 1,$$

$$D = \frac{1}{2} \frac{\Delta}{n^m - \cos \varphi'} \cdot \left( 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta}{n^m - \cos \varphi'} \cdot \frac{\varrho'}{\sin 2\zeta} \right),$$

$$\varrho = (n^m - \cos \varphi') \operatorname{tg} (\zeta - D\varphi'),$$

und erhält auf diese Weise:

	$\zeta = 30^\circ$	$60^\circ$	$70^\circ$
$n^m - \cos \varphi'$	0,000 280 390	0,000 280 495	0,000 280 671
$u/R$	1,001 302 1 ..	1,001 299 1 ..	1,001 296 6 ..
$D$	4,643 073 ..	4,622 599 ..	4,597 327 .. <sup>2)</sup>
$\varrho^m$	33,33''	99,69''	157,33''
Bessel	33,3''	99,7''	157,3''

Die übrigen Determinanten ( $D$ ) findet man durch Inter-

1) Abschnitt I. § 5.

2) Früher (§ 4) hatten wir gefunden:  $D_{10} = 4,6973$ .

polution  
werth  $\varrho$

$n^m -$

und dar  
formel

für  $\zeta = 0$

"  $\zeta = 40$

"  $\zeta = 50$

"  $\zeta = 60$

"  $\zeta = 65$

"  $\zeta = 70$

Na

Tafel

deren

Bezieh

(18)

H

Darste

einer a

lenbre

mung

könne

X.

§

stand

dem

hier

suche

1)

polution mit ausreichender Genauigkeit<sup>1)</sup>; der erste Näherungswerth  $\varrho'$  ist  $= (n^m - 1) \operatorname{tg} \zeta$ , also:

$$n^m - \cos \varrho' = n^m - 1 + \frac{1}{2} \varrho'^2 = (n^m - 1) \left( 1 + \frac{n^m - 1}{2} \operatorname{tg}^2 \zeta \right);$$

und daraus ergeben sich als determinirte Refractionsformeln:

$$\begin{aligned} \text{für } \zeta = 0 \text{ bis } 40^\circ: \quad \varrho^m &= (n^m - 1) \left( 1 + \frac{n^m - 1}{2} \operatorname{tg}^2 \zeta \right) \operatorname{tg} [\zeta - 4,64 (n^m - 1) \operatorname{tg} \zeta], \\ \text{,, } \zeta &= 40 \text{ bis } 50^\circ: \quad \operatorname{tg} [\zeta - 4,63 (n^m - 1) \operatorname{tg} \zeta], \\ \text{,, } \zeta &= 50 \text{ bis } 60^\circ: \quad \operatorname{tg} [\zeta - 4,62 (n^m - 1) \operatorname{tg} \zeta], \\ \text{,, } \zeta &= 60 \text{ bis } 65^\circ: \quad \operatorname{tg} [\zeta - 4,61 (n^m - 1) \operatorname{tg} \zeta], \\ \text{,, } \zeta &= 65 \text{ bis } 70^\circ: \quad \operatorname{tg} [\zeta - 4,60 (n^m - 1) \operatorname{tg} \zeta], \\ \text{,, } \zeta &= 70 \text{ bis } 75^\circ: \quad \operatorname{tg} [\zeta - 4,59 (n^m - 1) \operatorname{tg} \zeta]. \end{aligned}$$

Nach diesen sehr bequemen Formeln berechnet man die Tafel für  $n^m - 1 = 0,000280377$ ; den Uebergang zu anderen Luftzuständen ( $n' - 1$ ) vermittelt dann die einfache Beziehung:

$$(18) \quad \frac{\varrho}{\varrho^m} = \frac{n' - 1}{n^m - 1} = \frac{b' (1 + \gamma t^m)}{b^m (1 + \gamma t')}.$$

Hiermit verlasse ich für kurze Zeit die geometrische Darstellung. Der Hauptgewinn derselben ist die Entwicklung einer allgemeinen, die localen Eigenthümlichkeiten der Strahlenbrechung umfassenden Refractionsformel und die Bestimmung der Constanten  $n^m - 1$  und  $z_0^m$ . Auf Grund derselben können wir uns nun auf das Gebiet der Hypothese wagen.

(Fortsetzung im nächsten Heft.)

## X. Ueber den electricischen Widerstand der Gase; von E. Edlund.

§ 1. Es hat sich gezeigt, dass der electricische Widerstand der Gase in mehreren Hinsichten verschieden ist von dem der festen und tropfbar flüssigen Körper. Wir werden hier diese Verschiedenheiten in Betracht ziehen und versuchen, dieselben theoretisch zu erklären.

1) Abschnitt I. § 8.



1. Damit der Strom eines Electromotors einen festen oder tropfbar flüssigen Leiter durchflesse, ist es keineswegs nothwendig, dass die electromotorische Kraft eine bestimmte Stärke besitzt. Wie klein diese Kraft auch sei, geht doch der Strom durch den Leiter, obgleich die Stromstärke geringer wird in dem Maasse, wie die electromotorische Kraft vermindert oder der Widerstand vergrössert wird. Der Strom hört erst mit der electromotorischen Kraft selbst auf. Bei den Gasen dagegen ist das Verhältniss ein ganz anderes. Soll der Strom durch einen gasförmigen Körper hindurchgehen können, so muss die electromotorische Kraft eine gewisse Spannung auf den Electroden hervorbringen, deren Grösse von der Natur, der Dichtigkeit und der Temperatur des Gases abhängig ist und nicht unter eine gewisse Grenze sinken darf. Liegt die Spannung unter dieser Grenze, so zeigt sich das Gas als ein vollkommener Isolator.

2. Die Wärmemenge, die der Strom in einem festen oder tropfbar flüssigen Körper hervorbringt, ist bekanntlich dem Quadrate der Stromstärke proportional. Bei den Gasen dagegen ist diese Wärmemenge proportional der ersten Potenz der Stromstärke. Diese merkwürdige Eigenschaft der Gase wurde zum ersten mal von G. Wiedemann<sup>1)</sup> beobachtet und später von Naccari und Bellati<sup>2)</sup> wiederholt bewiesen.

3. Bei den festen und tropfbar flüssigen Leitern ist die vom Strome entwickelte Wärmemenge unter übrigens gleichen Verhältnissen dem Querschnitte des Leiters umgekehrt proportional. Bei den Gasen dagegen ist die entwickelte Wärmemenge von dem Querschnitte der durchgegangenen Gassäule unabhängig. Dies ist gleichfalls durch Beobachtungen von G. Wiedemann und von Naccari und Bellati bewiesen worden.

4. Bei festen und tropfbar flüssigen Körpern ist der Widerstand dem Querschnitte des Leiters umgekehrt proportional. G. Wiedemann hat auf experimentellem Wege

1) G. Wiedemann, Pogg. Ann. **145**. p. 237. 1872.

2) Naccari und Bellati, Beibl. **2**. p. 720. 1878.

bewiesen  
nöthig i  
durch e  
zu bring  
d. h. da  
Gassäul  
funden,  
Röhren  
und die  
5.

Unters  
zwei P  
licirten  
Warr  
bewies  
der St  
scher  
variire  
Aende  
ander  
Aus  
frühte  
Strom  
stand

6  
bewie  
sie z  
hinre  
Elem  
in de  
besti

1878.

bewiesen, dass die Spannung auf den Electroden, welche nöthig ist, um die Electricität einer Holtz'schen Maschine durch eine mit verdünntem Gase gefüllte cylindrische Röhre zu bringen, von dem Durchmesser der Röhre unabhängig ist, d. h. dass der Widerstand der Gase vom Querschnitte der Gassäule nicht abhängt.<sup>1)</sup> Schon vorher hatte Schultz gefunden, dass die Spannung fast die nämliche war in zwei Röhren, von welchen die eine einen Durchmesser von 0,5 und die andere von 16 mm hatte.<sup>2)</sup>

5. Bei festen und tropfbar flüssigen Leitern ist der Unterschied zwischen den electroskopischen Spannungen an zwei Punkten der Leitung dem mit der Stromstärke multiplicirten Widerstand zwischen diesen Punkten proportional. Warren de la Rue und Hugo Müller<sup>3)</sup> haben dagegen bewiesen, dass die Spannung bei den verdünnten Gasen von der Stromstärke ganz unabhängig ist. Die genannten Forscher liessen die Stromstärke zwischen weiten Grenzen variiren, ohne dass es ihnen möglich wurde, die geringste Aenderung in der Spannung zu bemerken. Durch eine andere Methode hat Hittorf<sup>4)</sup> dasselbe Resultat erhalten. Aus seinem Verfahren zieht Hittorf die wohl etwas verfrühte Folgerung, dass der Widerstand einer Gassäule der Stromstärke umgekehrt proportional sein soll, welchem Umstande er die grösste Bedeutung beilegt.

6. Schon vor mehreren Jahren hat Edm. Becquerel bewiesen, dass die Gase beginnen Leiter zu werden, wenn sie zu Rothglühhitze erwärmt werden.<sup>5)</sup> Ist die Temperatur hinreichend hoch, so vermag sogar der Strom eines einzigen Elementes die Gassäule zu durchdringen. Dass die Gase in der Rothglühhitze leitend werden, ist später von Hittorf<sup>6)</sup> bestätigt worden. Becquerel hat aber aus seinen Ver-

1) G. Wiedemann, Pogg. Ann. **158**. p. 53. 1876.

2) Schultz, Pogg. Ann. **135**. p. 254. 1868.

3) Warren de la Rue u. H. Müller, Compt.-rend. **86**. p. 1072. 1878.

4) Hittorf, Wied. Ann. **7**. p. 573. 1879.

5) Becquerel, Ann. de chim. et de phys. (3) **39**. p. 377. 1853.

6) Hittorf, Pogg. Ann. Jubelbd. p. 234. 1874.

suchen noch ein anderes Resultat gefolgert, auf welches wir hier die Aufmerksamkeit hinlenken wollen. Wenn man die Stärke des Stroms, der eine Gassäule durchläuft, durch verschiedene eingeschaltete Rheostatenwiderstände variiren lässt, so scheint dabei der Widerstand der Gassäule sich der Stromstärke umgekehrt proportional zu verhalten. Wenn  $E$  die electromotorische Kraft des Electromotors,  $i$  und  $i_1$  die Stromstärken,  $r$  und  $r_1$  die in der Leitungsbahn eingeschalteten Widerstände der festen und tropfbar flüssigen Leiter, und  $z$  und  $z_1$  die den zwei Stromintensitäten entsprechenden Widerstände der Gassäule bedeuten, so setzt Becquerel nach dem Ohm'schen Gesetz  $i = [E/(r+z)]$  und  $i_1 = [E/(r_1+z_1)]$ . Wenn die Gassäule aus der Leitungsbahn ausgeschlossen wird, und wenn  $M$  und  $M_1$  die Widerstände bezeichnen, die eingeschaltet werden müssen, um die Stromintensitäten  $i$  und  $i_1$  zu erhalten, so hat man  $i = E/M$  und  $i_1 = E/M_1$ . Daraus erhält man  $M - r = z$  und  $M_1 - r_1 = z_1$ . Wenn die Rechnung auf diese Weise ausgeführt wird, so kommt man wirklich, wie Becquerel's Versuche beweisen, zu dem sonderbaren Resultat, dass der Widerstand der Gase der Stromstärke umgekehrt proportional ist.

Diese Verschiedenheiten zwischen den festen und tropfbar flüssigen Körpern auf der einen Seite und den gasförmigen auf der anderen können sehr leicht erklärt werden, wenn man die von mir früher aufgestellte unitarische Theorie für die electricen Erscheinungen<sup>1)</sup> zu Grunde legt.

§ 2. Der Umstand, dass die electromotorische Kraft oder die electriche Spannung auf den Electroden eine gewisse Grenze nicht zu übersteigen braucht, damit der Strom einen festen oder tropfbar flüssigen Leiter durchflesse, hat nach dieser Theorie seinen Grund darin, dass der wirkliche Widerstand, den diese Leiter dem Strome entgegensetzen, der Stromstärke proportional ist.<sup>2)</sup> Der hierfür angeführte

1) Edlund, *Théorie des phénomènes électriques*. Abhandl. der k. Acad. der Wiss. zu Stockholm. 1874. Stockh. P. A. Norstedt u. Söhne, Leipzig, F. A. Brockhaus.

2) Edlund, *Pogg. Ann.* 148. p. 421. 1873.

Beweis g  
Rede ist  
Gasen d  
Verhältn  
damit d  
stand de  
tional s  
Hittori  
Stromst  
der Fall  
welche  
gross se  
Schliess  
im erste  
folgen,  
gross s  
könnte.  
migen  
keine  
vorbrin  
gig ist  
N  
durch  
des Q  
Strom  
in ein  
gleich  
der g  
gleich  
wird d  
und k  
deute  
Strom  
heit z  
geme  
Theo  
so wi  
verri

Beweis gilt aber nicht, wenn von gasförmigen Körpern die Rede ist. Wie oben schon erwähnt wurde, muss bei den Gasen die electricische Spannung, je nach den verschiedenen Verhältnissen, einen für jeden Fall bestimmten Werth haben, damit der Strom das Gas durchdringen soll. Der Widerstand der Gase kann folglich nicht der Stromstärke proportional sein. Man kann auch nicht mit Becquerel und Hittorf annehmen, dass der Widerstand der Gase der Stromstärke umgekehrt proportional sei. Denn wenn dieses der Fall wäre, müsste der Widerstand einer Gassäule, durch welche ein unendlich kleiner Strom fliesst, ausserordentlich gross sein. Bei einer electricischen Entladung oder bei dem Schliessen einer galvanischen Kette ist jedenfalls der Strom im ersten Augenblicke unendlich klein. Daraus würde dann folgen, dass der Widerstand in demselben Augenblicke so gross sein würde, dass die Strombildung nicht stattfinden könnte. Man muss daher annehmen, dass bei den gasförmigen Körpern, vorausgesetzt, dass der Strom in denselben keine Veränderung der Temperatur und dergleichen hervorbringe, der Widerstand von der Stromstärke unabhängig ist.

Nach der unitarischen Theorie wird der Widerstand durch den Druck bestimmt, den der Leiter auf der Einheit des Querschnittes gegen die Fortpflanzung des electricischen Stromes ausübt. Wir bezeichnen mit  $k$  diesen Gegendruck in einer Gassäule, deren Länge und Querschnitt der Einheit gleich sind. In einer Säule vom Querschnitte  $a$  wird dann der ganze Gegendruck gegen die Fortpflanzung des Stromes gleich  $ka$ . (Bei einem festen oder tropfbar flüssigen Körper wird der ganze Gegendruck  $ki$ , wenn  $i$  die ganze Stromstärke und  $k$  der Widerstand für die Einheit der Stromstärke bedeuten.) Wenn  $h$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Stromes, d. h. die Weglänge, die der Strom in der Zeiteinheit zurücklegt,  $i$  die Stromstärke und  $\delta$  eine für alle Körper gemeinsame Constante bezeichnen, so hat man nach der Theorie  $i = \delta ah$ . Wird also  $ka$  mit  $h$  oder  $i/\delta a$  multiplicirt, so wird das Product  $ki/\delta$  der vom Strome in der Zeiteinheit verrichteten mechanischen Arbeit proportional, und wird

nun dieses Product mit dem Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit multiplicirt, so erhält man einen Ausdruck, welcher in der Zeiteinheit entwickelten Wärmemenge proportional ist. Es folgt also aus der Theorie, dass diese Wärmemenge der Stromstärke proportional, von dem Durchmesser der Gassäule aber unabhängig ist.

Weil der Widerstand durch den Druck, den der Leiter auf der Einheit des Querschnittes der Fortpflanzung des Stromes entgegensetzt, bestimmt wird, und weil bei den Gasen dieser Gegendruck von der Stromstärke unabhängig ist, so ergibt sich von selbst, dass der Widerstand mit der Grösse des Durchmessers nichts zu thun hat.

Der Unterschied zwischen den electroskopischen Spannungen an zwei Punkten eines Stromleiters ist nach der unitarischen Theorie dem wirklichen Widerstande des Leiters zwischen diesen Punkten proportional.<sup>1)</sup> Da nun dieser Widerstand bei den Gasen von der Stromstärke unabhängig ist, so muss dieses auch mit dem Unterschiede der electroskopischen Spannungen der Fall sein.

Wenn  $r$  den wesentlichen Widerstand in einer geschlossenen Kette, die nur aus festen und tropfbar flüssigen Leitern besteht,  $L$  die Länge der Leitungsbahn,  $n$  den Querschnitt der Polplatten,  $E$  die electromotorische Kraft und  $i$  die Stromstärke bezeichnen, so hat man nach der unitarischen Theorie für die Berechnung der Stromstärke die Differentialgleichung<sup>2)</sup>:

$$L \frac{di}{dt} = nE - nri,$$

woraus man durch Integration das Ohm'sche Gesetz:

$$i = \frac{E}{r} \text{ erhält.}$$

Wenn dagegen eine Gassäule mit dem Widerstande  $R$  sich in der Leitungsbahn befindet, so bekommt man:

$$L \frac{di}{dt} = nE - nR - nri, \text{ woraus } i = \frac{E - R}{r}.$$

Der Widerstand  $R$  der Gassäule befindet sich also in dem Zähler und nicht in dem Nenner, wo er nach dem Ohm's-

1) Edlund, Pogg. Ann. 149. p. 96. 1873.

2) Edlund, Pogg. Ann. 148. p. 428. 1873.

schen Gesetz stehen würde. Man sieht hieraus, dass  $E$  nothwendig grösser als  $R$  sein muss, wenn ein Strom soll entstehen können.

Wenn man in dem Falle, dass die Gassäule in der Leitungsbahn eingefügt ist, zwei verschiedene Rheostatenwiderstände einschaltet, so erhält man, da  $i$  und  $i_1$  die entsprechenden Stromstärken bedeuten:

$$i = \frac{E - R}{r} \quad \text{und} \quad i_1 = \frac{E - R}{r_1}.$$

Wird die Gassäule aus der Leitungsbahn ausgeschaltet, und bedeuten  $M$  und  $M_1$  die Widerstände, die erforderlich sind, um wiederum die Stromstärken  $i$  und  $i_1$  zu erhalten, so hat man:

$$i = \frac{E}{M} \quad \text{und} \quad i_1 = \frac{E}{M_1}.$$

Hieraus erhält man:  $\frac{i_1}{i} = \frac{M - r}{M_1 - r_1}.$

Wenn man nun, wie Becquerel und Hittorf es gethan, annimmt, dass  $M - r$  und  $M_1 - r_1$  die Widerstände der Gassäule bei den respectiven Stromstärken  $i$  und  $i_1$  darstellen, so bekommt man das sonderbare Resultat, dass diese Widerstände im umgekehrten Verhältnisse zu den Stromstärken stehen; ungeachtet in der Wirklichkeit diese Widerstände von den Stromstärken unabhängig sind.

# **XI. Bemerkung über Hrn. F. Auerbach's zweite Abhandlung: „Ueber die magnetische Nachwirkung“<sup>1)</sup>; von Dr. A. von Waltenhofen.**

Im November des Jahres 1863 habe ich der kaiserlichen Academie der Wissenschaften in Wien die bis dahin ganz unbekannte Thatsache mitgetheilt, dass das magnetische Residuum einer Eisenmasse von der Geschwindigkeit abhängt, mit welcher der magnetisirende Strom auf Null reducirt wird, indem es bei verlangsamer Stromunterbrechung sehr bedeu-

1) F. Auerbach, Wied. Ann. 14. p. 308. 1881.

tend anwächst. Ich habe schon damals hervorgehoben, dass die gleichfalls von mir entdeckte „anomale Magnetisirung“ ein specieller Fall jenes allgemeinen Gesetzes ist, und habe von den sehr zahlreichen absoluten Messungen, durch welche ich diese Thatsachen constatirt hatte, einige numerische Beispiele mitgetheilt, die jedermann in den Stand setzen, dieselben Versuche zu wiederholen. Endlich habe ich auch schon damals eine seither immer mehr als plausibel anerkannte Erklärung von beiden Erscheinungen gegeben, welche sogar einer mathematischen Theorie derselben zu Grunde gelegt werden könnte.

Ich kann es daher nicht mit Stillschweigen übergehen, wenn Hr. F. Auerbach p. 326 seiner oben citirten Abhandlung die von mir vor 18 Jahren entdeckte, untersuchte und erklärte Erscheinung als das „Fromme'sche Phänomen“ bezeichnet, während er mir nur die anomale Magnetisirung zuschreibt.

Es scheint, dass Hr. F. Auerbach meine diesbezügliche Abhandlung nur nachcitirt, aber nicht gelesen hat. Es hätte ihm sonst auch nicht begegnen können, dass er mein darin angegebenes Verfahren: die allmähliche Entmagnetisirung des Electromagnets durch Widerstandseinschaltung zu erzielen, als eine vermeintlich neue Modification des Fromme'schen Verfahrens (nämlich den Electromagnet aus der Spirale zu nehmen) in Vorschlag bringt.

Ich finde mich daher durch die Abhandlung des Hrn. F. Auerbach veranlasst, meine Priorität bezüglich der Entdeckung der Abhängigkeit des magnetischen Rückstandes von der Entmagnetisirungsgeschwindigkeit mir ausdrücklich zu wahren, was im vorliegenden Falle um so leichter ist, als gerade Hr. Fromme selbst, wie ich dankend anerkennen muss, so freundlich war, dieselbe mit den bestimmtesten Worten ausdrücklich zu constatiren, und die besagte Erscheinung unter meinem Namen sogar schon in Lehrbücher übergegangen ist. Es mag daher genügen, wenn ich noch folgende Citate, welche meine bisher unbestritten und ausschliesslich anerkannte Priorität documentiren, in chronologischer Reihenfolge anführe.

1) P  
2. Aufl.  
2) M  
3) C  
2. Aufl.  
4) I  
Dortmu  
5) J  
6) J  
7) J  
p. 488.

## XII. Ersch

Di  
der Ge  
legt w  
cales I  
Kohle  
die Sie  
blasen  
durch  
Röhre  
D  
Vorau  
Verh  
dopp  
des V  
S  
nen  
Appa  
Weis  
1



- 1) Pisko, Lehrbuch der Physik für Oberrealschulen, 2. Aufl. 1869 p. 252 und 3. Aufl. 1873 p. 312.
- 2) M. R. Radau, *Moniteur scientifique*, 1869, Bd. 11. p. 753.
- 3) G. Wiedemann, *Galvanismus u. Electromagnetismus*, 2. Aufl. 1873 Bd. 2. p. 358.
- 4) Ruths, über den Magnetismus weicher Eisencylinder. Dortmund 1876. p. 33.
- 5) Fromme, *Göttinger Nachrichten* 1877. p. 518.
- 6) Fromme, *Wied. Ann.* Bd. 5 p. 346. 1877.
- 7) Müller-Pfaundler, *Lehrb. der Physik* 1881 Bd. 3. p. 488.

## *XII. Ueber einen Apparat zur Darstellung der Erscheinungen des Geysirs; von G. Wiedemann.*

Die von Bunsen aufgestellte Theorie der Eruptionen der Geysirs ist von J. Müller<sup>1)</sup> durch einen Versuch belegt worden, bei welchem er ein mit Wasser gefülltes verticales Blechrohr unten und etwa in der Mitte durch glühende Kohlen erhitzt. Hat das Wasser zwischen den Heizstellen die Siedetemperatur erreicht, so steigen zuerst einzelne Dampfblasen durch das Wasser auf, und dann wird das letztere durch die in ein weiteres Gefäß mündende Oeffnung der Röhre in die Höhe geschleudert.

Dieser Apparat entspricht indess nicht vollständig den Voraussetzungen, welche für die in der Natur obwaltenden Verhältnisse gemacht worden sind, da bei dem Geysir eine doppelte Heizstelle nicht anzunehmen ist und die Eruption des Wassers sich nur einmal herstellen lässt.

Schon seit einer Reihe von Jahren benutze ich in meinen Vorlesungen den folgenden, leicht zu construirenden Apparat (Taf. I Fig. 5), welcher in sicherer und einfacher Weise die Phänomene darzustellen geeignet ist.

An einem Statif ist ein starker, etwa 500 ccm fassen-

1) J. Müller, *kosmische Physik*. 2. Aufl. p. 386. 1865.

der Glaskolben befestigt, dessen Hals durch einen mittelst Seidenschnüren oder Drähten festgehaltenen Kautschukpfropfen verschlossen ist. Durch die Mitte desselben geht eine etwa 70 cm lange und 1 cm weite Glasröhre, welche im Innern des Kolbens mit dem Pfropfen bündig abgeschnitten und am oberen Ende zu einer nicht zu engen Spitze ausgezogen ist. Die Spitze ist mittelst eines zweiten Kautschukpfropfens in ein weiteres Becken eingesetzt. Ferner geht durch den Pfropfen auf dem Kolben ein engeres, etwa 3—4 mm weites Glasrohr, dessen oberes Ende in ein seitliches Gefäß voll Wasser mündet. Unten ist das Rohr nahe am Boden des Kolbens etwas nach oben gebogen. Das Niveau des Wasser im seitlichen Gefäß liegt etwas unterhalb der Oeffnung der Spitze des verticalen Rohrs.

Nachdem der ganze Apparat mit Wasser gefüllt ist, wird der Kolben durch einen Bunsen'schen Brenner von unten erhitzt. Die verticale Glasröhre stellt dann die Steigerröhre des Geysirs, die Gasflamme die in der Erde befindliche Wärmequelle, die seitliche Röhre die Spalten dar, aus denen im Erdreich kaltes Wasser dem unteren Theil des Geysirs zuströmt. Der weitere Kolben dient zur Vermehrung der Wassermenge, wodurch die Heizung besser regulirt werden kann. Bei der allmählichen Erwärmung des Wassers im Kolben entweicht zuerst die Luft in kleinen Bläschen, dann beginnt das Wasser zu siedern, kleinere und grössere Blasen steigen auf, die Flüssigkeitssäule im verticalen Rohre hebt sich und fällt wieder nieder, wenn die Blasen sich in den oberen Theilen des Apparates condensiren. Treten zahlreichere und grössere Blasen auf, so werden auch wiederholt immer grössere Mengen des Wassers aus der Oeffnung des Rohres in kleinen Eruptionen hinausgeschleudert. Wird das Sieden sehr lebhaft, sodass die aufsteigenden Blasen den ganzen Querschnitt des verticalen Rohrs erfüllen und dabei die von ihnen verdrängte Wassermenge aus der Oeffnung herausgetrieben wird, so siedet infolge der Druckverminderung die ganze Wassermasse im Kolben stark auf; das Wasser im Rohr wird herausgeschleudert, oft bis zu zwei und drei Metern Höhe. Von dem bis zum Boden siedenden Wasser

werden  
Wasserd  
hinausge  
Dabei k  
Zuflussr

Ha  
ben hin  
befindlic  
zu comp  
Wasser  
und die

Die  
des Ko  
kalten  
Die Ga  
ohne j  
Period

Dr  
bei sei  
kältere  
kälter  
Mitte  
sinken  
dass d  
ticaler  
wallen

B  
der E  
wieder  
annim

1)

werden mit den mit grosser Lebhaftigkeit entweichenden Wasserdämpfen noch weitere nicht unbeträchtliche Mengen hinausgeworfen, sodass die Eruption längere Zeit andauert. Dabei können selbst einige Dampfblasen durch das engere Zuflussrohr bis in den seitlichen Wasserbehälter gelangen.

Hat sich infolge der Dampfbildung das Wasser im Kolben hinlänglich abgekühlt, und brennt die unter demselben befindliche Flamme nicht stark genug, um diese Abkühlung zu compensiren, so fliesst aus dem seitlichen Behälter kaltes Wasser in den Kolben ein, der Apparat füllt sich wieder, und die Erscheinungen beginnen von neuem.

Die Biegung des engeren Rohres nach oben im Innern des Kolbens verhindert das Auftreffen des zuströmenden kalten Wassers auf den stark erhitzten Boden des letzteren. Die Gasflamme kann so regulirt werden, dass die Eruptionen ohne jede Aenderung des Apparates sich in regelmässigen Perioden wiederholen.

Da das heisserere Wasser in der Tiefe des Apparates bei seiner geringen Compressibilität<sup>1)</sup> leichter als das obere kältere ist, und zugleich die Wände des verticalen Rohres kälter sind, so muss vor den Explosionen das Wasser in der Mitte des Rohres aufsteigen und an den Wänden niedersinken. Auch die aufsteigenden kleineren Blasen bewirken, dass das gehobene Wasser neben ihnen im Innern des verticalen Rohres an den Seiten nach unten abfliesst, wodurch wallende Strömungen entstehen.

Bei diesem Apparat ist also keine heberartige Biegung der Eruptionsröhre zur Darstellung der regelmässig sich wiederholenden Erscheinungen erforderlich, wie sie Lang annimmt.

Leipzig, 23. Dec. 1881.

---

1) Vgl. Lang, Götting. Gel. Anz. p. 225. 7. April 1880.

### XIII. Ueber die Wheatstone'sche Brücke; von K. F. Slotte.

Die Länge des zu diesem Apparate gehörigen Platindrahtes, die sich durch Messung nicht genau bestimmen lässt, kann bekanntlich indirect — durch Vergleichen und Vertauschen von Leitungswiderständen — ermittelt werden.<sup>1)</sup> Eine Abänderung dieser Methode ist das folgende Verfahren, welches nicht ohne Vortheile sein dürfte.

Sei  $s$  die Länge des Drahtes,  $a$  und  $b$  die der beiden Abtheilungen desselben, wenn zwei Widerstände  $w_1$  und  $w_2$  eingeschaltet sind und das Galvanometer keinen Strom anzeigt. Dann ist:

$$(1) \quad \frac{w_1}{w_2} = \frac{a}{b} = \frac{s + a - b}{s - (a - b)} = \frac{s + d_1}{s - d_1},$$

wo  $a - b = d_1$  gesetzt wird. Vertauscht man nun die Widerstände  $w_1$  und  $w_2$  und wird der bewegliche Contact verschoben, bis durch den Galvanometerdraht wieder kein Strom fliesst, so ist diese Verschiebung, positiv oder negativ genommen, je nachdem  $a$  grösser oder kleiner als  $b$  ist, gleich  $d_1$ , welche Grösse somit durch Ablesen auf dem Maassstabe des Apparates direct bestimmt werden kann.

Vergleicht man in derselben Weise  $w_2$  mit einem dritten Widerstande  $w_3$  und  $w_3$  wieder mit  $w_1$  und werden die  $d_1$  entsprechenden Verschiebungen resp. mit  $d_2$  und  $d_3$  bezeichnet, so ist:

$$(2) \quad \frac{w_2}{w_3} = \frac{s + d_2}{s - d_2},$$

$$(3) \quad \frac{w_3}{w_1} = \frac{s + d_3}{s - d_3}.$$

Aus (1), (2) und (3) erhält man:

$$1 = \frac{(s + d_1)(s + d_2)(s + d_3)}{(s - d_1)(s - d_2)(s - d_3)}$$

und schliesslich durch Auflösung der letzten Gleichung:

$$(4) \quad s = \sqrt{-\frac{d_1 d_2 d_3}{d_1 + d_2 + d_3}}.$$

Drei nach dieser Methode ausgeführte Bestimmungen, bei welchen  $w_2$  annähernd gleich  $\sqrt{w_1 w_3}$  gewählt wurde, lieferten für  $s$  die Werthe: 1118,11, 1118,75, 1118,6 mm.

1) Siehe G. Wiedemann, Galv. (2) 1. p. 254.

Un  
Oberflä  
mit Ob  
einzel  
durchs  
gen di  
stellte  
neuer  
E. W  
Oberfl  
Glan  
In  
über  
spiege  
Gegen  
reflex  
und d

1)  
2)  
3)  
4)  
Wied.  
5)  
p. 126  
6)  
7)  
8)  
Pogg.  
AB